

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

ВЫПУСК 17

Под редакцией
академика Б. Б. КАДОМЦЕВА



МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
1989

УДК 533.9.01(081)

Вопросы теории плазмы: Сб. науч. ст. Вып. 17/
Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева.—М.: Энерго-
атомиздат, 1989. — 248 с.

Излагаются результаты, полученные в последние годы по теории генерации в токамаке токов увлечения неомическими методами. В выпуск также включен обзор по современному состоянию теории устойчивости течений плазмы и жидкости.

Для специалистов, занимающихся физикой плазмы и проблемами управляемого термоядерного синтеза

Ил. 101. Библиогр. 305 назв.

Редколлегия: А. А. Галсев, В. В. Парилл, О. П. Погуце,
Д. Д. Рютов

Ответственный редактор З. Д. Андриенко

ГЕНЕРАЦИЯ БЕЗЫНДУКЦИОННОГО ТОКА В ТОКАМАКЕ*

Я. И. Колесниченко, В. В. Параил, Г. В. Переверзев

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы как в рамках международного сотрудничества, так и в рамках национальных программ интенсивно разрабатываются проекты термоядерного реактора на базе установок токамак. Хорошо известно, что наиболее уязвимым местом в концепции реактора-токамака является цикличность его работы, связанная с необходимостью использования индукционного электрического поля для создания удерживающего плазму полоидального магнитного поля. Наличие необходимых для перематывания индуктора «пауз» в работе реактора приводит ко многим крайне нежелательным последствиям. Наиболее опасное из них, по-видимому, — это появление циклических колебаний температуры первой степени токамака (так называемых «термокачек»), резко снижающих долговечность реактора. Очень опасны и циклические силовые нагрузки на элементы реактора, возникающие при изменении полоидального и вертикального магнитных полей. Именно поэтому в последние годы широкое распространение получили теоретические и экспериментальные исследования безындукционных методов поддержания тока в токамаке, позволяющие, в принципе, получить стационарный режим работы реактора-токамака.

Впервые идея о возможности создания стационарного тока в токамаке была высказана Окавой в 1970 г. [1]. Автор предлагал использовать для этого направленную инжекцию пучков нейтральных атомов. В 1971 г. Уорт [2] предложил использовать для генерации стационарного тока бегущие альфвеновские волны.

В этих (как и во многих более поздних) работах физический механизм генерации тока был основан на внесении в плазму извне продольного компонента импульса. Поглощение его группой резонансных частиц (обычно электронов) должно приводить к направленному движению последних, т. е. генерации тока. В 1971 г. Б. Б. Кадомцевым, В. Д. Шафрановым [3] и Бикертоном, Коннором, Тейлором [4] независимо была высказана идея возможности создания стационарного токамака за счет использования неизбежного в столкновительной плазме радиального потока запертых электронов. С тех пор исследования по генерации тока в токамаке безындукционными методами постоянно расширялись и сейчас работы по этой тематике заняли прочное место во всех

* Введение, гл. 1, § 2.4 и Заключение написаны В. В. Параилом, гл. 2 — Я. И. Колесниченко, гл. 3 — Г. В. Переверзевым.

международных и европейских конференциях по физике плазмы и УТС. В материалах этих конференций, а также в трудах варенна-гренобльских симпозиумов по нагреву в тороидальных системах собраны основные результаты как теоретических, так и экспериментальных исследований. В последние годы появились и обзоры по проблеме генерации тока в токамаке безындукционными методами [5, 6]. Однако в силу ряда причин эти работы не смогли всесторонне осветить проблемы этой весьма обширной области физики плазмы. Настоящий обзор посвящен подробному описанию современного состояния теории генерации стационарного тока в токамаках и сравнению развитых теоретических представлений с результатами экспериментов. Прежде чем переходить к описанию конкретных методов генерации такого тока, проанализируем общие для всех безындукционных способов преимущества и недостатки, на основании которых может быть сделан вывод о целесообразности их использования в реакторе.

Прежде всего, к неоспоримым преимуществам безындукционных методов относится возможность получения стационарного реактора без термокачек и циклических силовых нагрузок. Детальный анализ этого преимущества, конечно, выходит за рамки обзора. Отметим лишь, что даже из чисто энергетических соображений за счет ликвидации пауз средняя по времени полезная мощность реактора увеличивается примерно на 10%, что в пересчете на стандартный термоядерный реактор составляет $\Delta P_T \sim 100$ МВт. Не следует, конечно, забывать, что на поддержание стационарного тока должна затрачиваться соответствующая мощность P_Q . Эта мощность, во-первых, не должна превышать ΔP_T . Во-вторых, P_Q должна быть существенно меньше мощности, выделяемой в плазме рождающимися во время термоядерной реакции α -частицами (невыполнение последнего условия может заметно снизить энергетическую эффективность реактора и привести к его перегреву). Поэтому вычисление эффективности генерации тока безындукционными методами I_Q/P_Q . (I_Q — полный ток плазмы, P_Q — полная вводимая мощность) является одной из основных задач теории. Однако поскольку нам придется оперировать этим параметром уже здесь, во введении, предварим строгим расчетам качественное описание идеи генерации тока на примере использования ВЧ-волн.

Пусть в плазму с плотностью n_e и температурой электронов T_e вводится поток волн с энергией кванта $\hbar\omega$ и продольным (по отношению к внешнему магнитному полю) компонентом импульса $\hbar k_{||}$. Предположим, что эти волны взаимодействуют только с резонансными электронами, так что в единицу времени и в единице объема такие электроны поглощают \dot{N} квантов. Следовательно, в единицу времени резонансные электроны получают от волн импульс $\dot{M} = \hbar k_{||} \dot{N}$ и энергию $\dot{E} = \hbar\omega \dot{N}$. Приобретенный электронами импульс $m(nu_{||})_p$ [и

связанный с ним ток $j_{\parallel} = -e(nu_{\parallel})_p]$ диссипирует в результате рассеяния резонансных электронов на ионах и нерезонансных электронах. Баланс импульса определяется продольным компонентом уравнения движения:

$$dj_{\parallel}/dt = -e\dot{M} - v_{ei}(u_{\parallel p})j_{\parallel}, \quad (\text{B.1})$$

где $v_{ei}(u_{\parallel p})$ — эффективная частота столкновений, зависящая от скорости резонансных частиц. Поскольку удельный продольный импульс \dot{M} связан с удельной мощностью источника волн P соотношением $\dot{M} = Pk_{\parallel}/\omega$, то из уравнения (B.1) в стационарном случае непосредственно следует формула для эффективности генерации тока:

$$\eta \equiv j/P = ek_{\parallel}/[m\omega v_{ei}(u_{\parallel p})]. \quad (\text{B.2})$$

Оставим пока в стороне вопрос о зависимости η от фазовой скорости волны, поскольку эта характеристика существенно различна для разных методов генерации тока. Из вывода (B.2) следует, что для любого неомического метода генерации тока эффективность η обратно пропорциональна плотности плазмы: $\eta \sim n_e^{-1}$. Отсюда обычно делается вывод о том, что неомические методы генерации тока неэффективны в реакторах с большой плотностью («критической» в отношении экономичности обычно считается плотность $n_e \sim 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$). Однако если говорить о чисто энергетическом аспекте этой проблемы (отвлекаясь, например, от вопроса о перегреве плазмы), то, как известно, мощность термоядерного энерговыделения P_T растет пропорционально квадрату плотности плазмы, так что отношение $P_Q/P_T \sim IR_0/n_e$ (R_0 — большой радиус токамака). Даже с учетом того обстоятельства, что для удержания плазмы в токамаке требуется выполнение условия равновесия $8\pi n_e T_e / B_0^2 \leq R_0/a$ (т. е. $I \sim \sqrt{n_e T_e / R_0}$), следует, что $P_Q/P_T \sim \sqrt{R_0/n_e}$. Что же касается абсолютного значения эффективности η , то оно довольно сильно меняется от метода к методу (см. подробный анализ ниже). Пока укажем лишь, что для оптимальных схем генерации тока теоретическое значение η достаточно велико, чтобы обеспечить экономичность реактора — токамака типа ИНТОР.

Энергетический выигрыш не единственное преимущество безындукционных методов генерации тока в токамаке. Принципиальным отличием большинства этих методов от омического является слабая связь между профилем создаваемого тока и профилем электронной температуры. Последнее обстоятельство весьма существенно с точки зрения МГД-устойчивости плазмы. Известно, что в типичных омических разрядах токамаков значительная часть потерь тепловой энергии связана с быстрыми конвективными течениями, возникающими из-за развития крупномасштабных МГД-неустойчивостей. Наиболее ярко эти процессы проявляются в центральной части шнура, где вызываемые МГД-активностью

моды $m=1$ пилообразные колебания приводят к периодическим резким выбросам энергии центральной части шнура за поверхность с $q=1$. Проведенные недавно эксперименты по подавлению пилообразных колебаний при генерации тока в токамаке нижнегибридными (НГ) волнами привели к удвоению температуры плазмы в центре шнура при практически неизменном уровне вкладываемой мощности. Не менее интересна возможность использования неомических методов генерации тока для подавления $m=2$ и высших тиринг-мод и создания оптимальных в отношении МГД-устойчивости профилей тока. Вообще поскольку безындукционные методы теоретически обладают большой гибкостью в профилировании тока, то и диапазон описанных в литературе вариантов их использования весьма широк. Подробное их описание выходит за рамки настоящего обзора. Укажем лишь на опубликованную недавно идею использования безындукционных методов для создания реактора, работающего во второй зоне устойчивости по идеальным модам. Схема эта привлекательна прежде всего тем, что требует существенно меньших значений продольного тока при том же энергетическом выходе. Большие преимущества имеют и варианты использования безындукционных методов генерации тока в токамаках с некруглым сечением, где возможности омического метода профилирования тока явно недостаточны. Конечно, безындукционные методы обладают и целым рядом недостатков, анализ которых еще далеко не завершен.

Серьезной проблемой для большинства известных методов является проблема проникновения ВЧ-волны или пучков частиц к центру плазмы и связанный с ней вопрос о возможности создания и поддержания оптимальных профилей тока. Известно, что характерная длина проникновения вихревого электрического поля $l_{\Omega} \simeq \simeq \sqrt{c^2 / (4\pi\sigma\omega)}$ (σ — проводимость плазмы, ω — частота изменения вихревого поля) всегда может быть сделана больше малого радиуса a соответствующим выбором частоты ω . Для большинства неомических методов «потеря» энергии при распространении волн или пучков частиц от периферии к центру плазмы может оказаться весьма значительной и к тому же резко зависеть от параметров плазмы. Поэтому вопросу о создании токов безындукционными методами в неоднородной плазме посвящено очень большое количество теоретических и расчетных работ. Их анализу частично посвящена гл. 3.

Гораздо менее изучен вопрос о влиянии вызванного внесением внешнего продольного импульса вращения плазмы на ее устойчивость. Как известно, вихревое электрическое поле не приводит к изменению тороидального импульса плазмы. Большинство же неомических методов, воздействуя преимущественно на электроны или на ионы, приводят к ускорению плазмы в тороидальном направлении. Если поперечная ионная вязкость недостаточна для торможения плазмы, скорость ее вращения может приблизиться к скорости звука и вызвать целый ряд нежелательных последст-

вий. Прежде всего, быстрое вращение ухудшает устойчивость плазмы по крайней мере по отношению к колебаниям баллонного типа.

Затем, с приближением скорости вращения к скорости звука резко возрастают значения коэффициентов неклассического переноса. И, наконец, такое вращение дает заметный вклад в давление плазмы, вызывая соответствующее уменьшение предельного «теплового» давления, также ограниченного сверху устойчивостью плазмы. Следует отметить, что тороидальная сила, действующая на плазму со стороны внешнего источника, зависит от способа создания тока. Она минимальна для тех методов, которые приводят к переносу тока пучком ускоренных электронов, поскольку для последних сила динамического трения [пропорциональная $v_{ei}(u_{\parallel p})$] минимальна для $u_{\parallel p} \gg v_{Te} = \sqrt{2T_e/m}$.

Серьезной проблемой для стационарной схемы работы реактора-токамака может быть и вопрос удаления из плазмы продуктов реакции и накопления в плазме примесей. Оба эти вопроса в основном связаны с процессами переноса в плазме токамака и к настоящему времени практически не изучены.

До сих пор речь шла об использовании неомических методов для поддержания стационарного тока. Эта схема, конечно, наиболее предпочтительна, однако она не единственно возможная. Кроме нее обсуждается также использование безындукционных методов на стадии подъема в плазме токамака продольного тока (и накопления индуктивной энергии) и для периодического перемагничивания индуктора. Первая из этих возможностей позволяет «сэкономить» вольт-секунды индуктора и пролить омическую квазистационарную стадию разряда. Такой режим работы реактора, конечно, является циклическим, однако позволяет значительно увеличить долговечность конструкции за счет увеличения отношения длительности горения к длительности паузы. Использование безындукционных методов для перемагничивания индуктора предполагает квазинепрерывную работу токамака. При этом рабочий режим горения плазмы с омическим поддержанием чередуется с периодами, когда в плазму с пониженной плотностью и температурой (плазму без термоядерного горения) вводится дополнительная мощность, достаточная для поддержания тока, заметно превышающего его рабочее значение. Наличие сильной индуктивной связи приводит к перекачке магнитного потока в индуктор и его последующему перемагничиванию, после чего токамак готов опять работать в режиме горения. Это промежуточное решение помогает заметно снизить циклические силовые нагрузки, однако не ликвидирует термокачку. С точки зрения теории характерной особенностью обоих этих режимов работы является наличие в плазме вихревого электрического поля, создающего омический ток, направленный навстречу току безындукционному. Как показали эксперименты и соответствующие теоретические расчеты, влияние такого поля может заметно изменить физическую

картину генерации неомического тока. Особенно велико влияние поля E на те методы, которые передают свой импульс небольшой группе надтепловых электронов (нижнегибридные и циклотронные волны), поскольку при достаточно сильном вихревом поле такие электроны попадают в режим убегания и могут заметно изменить проводимость плазмы. Отметим, что как в случае подъема тока, так и в случае перематывания индуктора экономические соображения диктуют необходимость проведения этих процессов за минимальное время, т. е. при максимально возможном электрическом поле.

1. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ БЕЗИНДУКЦИОННЫХ МЕТОДОВ ГЕНЕРАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ТОКА В ТОКАМАКЕ

1.1. Основные механизмы генерации тока

Установлено много различных по своей физической природе механизмов генерации стационарного тока в токамаке. Введем классификацию этих методов в соответствии с физическими механизмами, заложенными в их основу. Поскольку везде ниже (кроме специально оговоренных случаев) речь будет идти об электронном токе, то для описания физических процессов генерации тока на уровне оценок достаточно ограничиться z -компонентом электронного уравнения движения:

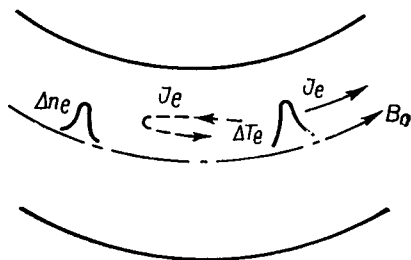
$$\frac{\partial v_{ze}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_{ze} = \frac{F_z}{mn_e} - \frac{eE_z}{m} - \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}]_z - \frac{1}{mn_e} \frac{\partial n_e T_e}{\partial z} - v_{ei} (v_{ze} - v_{zi}). \quad (1.1)$$

Первый член в правой части (1.1) описывает изменение импульса резонансного электрона при взаимодействии с внешним источником, все остальные члены общеизвестны. Рассматривая стационарное решение (1.1) и пренебрегая инерцией электронов, получаем:

$$j_z \cong \frac{e}{mv_{ei}} \left\{ F_z - en_e E_z - \frac{en_e}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}]_z - \frac{\partial n_e T_e}{\partial z} \right\}. \quad (1.2)$$

Выше уже говорилось, что один из методов генерации тока — введение внешнего продольного импульса с помощью ВЧ-волн или с помощью пучка нейтральных атомов. Формально этот ток описывается первым членом в правой части (1.2) и пропорционален внешней силе F_z . Однако такой метод генерации тока (кстати, он наиболее полно исследован теоретически и экспериментально) далеко не исчерпывает возможностей уравнения (1.2). Прежде всего обратимся к току, связанному с наличием в плазме продольного градиента электронного давления. Напомним, что в токамаке координата z — циклическая, поэтому $\int_0^{2\pi R_0} dz \partial n_e T_e / \partial z = 0$. На первый

Рис. 1.1. Схема генерации тока при одно-временной модуляции плотности и температуры плазмы



взгляд, это делает невозможной генерацию тороидального тока градиентом электронного давления. Однако из-за зависимости $v_{ei} \sim n_e/T_e^{3/2}$ из (1.2) следует:

$$j_z^{(vp)} \sim T_e^{3/2} \frac{\partial n_e T_e / \partial z}{n_e}. \quad (1.3)$$

Предположим, что каким-либо внешним источником (не обладающим продольным импульсом) в плазме токамака создано локальное по z возмущение плотности и температуры электронов, так что:

$$\left. \begin{aligned} n_e &= n_0 + \tilde{n} \cos(z/R_n + \delta_n); \\ T_e &= T_0 + \tilde{T} \cos(z/R_0 + \delta_T), \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где δ_n и δ_T — фазы возмущения n_e и T_e соответственно. Проводя в (1.3) усреднение по z , получаем:

$$\langle j_z^{(vp)} \rangle \simeq e \tilde{n} \tilde{T} \sin(\delta_n + \delta_T) / (v_{ei} m R_0). \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что генерируемый градиентом электронного давления ток максимален, когда максимум возмущения плотности сдвинут относительно максимума возмущения температуры на угол $\pi/2$. Физический принцип генерации тока таким способом легко понять из рис. 1.1. Создаваемое внешним источником возмущение \tilde{T} распространяется по z в обе стороны от максимума с характерной скоростью порядка v_{Te} . Свободному распространению электронов препятствуют электрон-ионные столкновения, частота которых пропорциональна плотности плазмы. Поскольку слева от \tilde{T}_{\max} плотность плазмы больше, чем справа, электронный поток приобретает направленную скорость $v_z > 0$. Импульс отдачи переходит в ионы, так что суммарный тороидальный импульс частиц плазмы естественно равен нулю. Впервые такой метод генерации тока был предложен в [7].

Обратимся теперь к предпоследнему члену в правой части (1.2). Поскольку у токамака $B_r = 0$, из (1.2) следует:

$$j_z^{(vB)} \simeq [e^2 n_e / (m v_{ei})] v_r B_\theta = \sigma v_r B_\theta. \quad (1.6)$$

В настоящее время детально рассмотрены три принципиальных схемы использования силы Лоренца для генерации торо-

идального тока. Первая из них, исторически возникшая из анализа динамики пинчей с обращенным полем [8], получила название «F — θ -pumping». Суть ее заключается в следующем. Предположим, что с помощью внешних устройств создаются периодические во времени возмущения B_z и B_θ . Модуляция B_θ может быть вызвана включением осциллирующего электрического поля $E_z = E \sin(\Omega t)$ (так что $\langle E_z \rangle = 0$). Модуляция поля $B_z = B_0 + \tilde{B}_z \sin(\Omega t + \delta)$ может вызываться изменением тока в катушках тороидального поля и в силу вмерзженности плазмы приводит к появлению периодического радиального потока плазмы $\tilde{v}_r \sim \tilde{B}_z / B_0$. Средний по времени тороидальный ток $\langle j_z \rangle$, пропорциональный нелинейному отклику системы на периодические возмущения

$$\tilde{v}_r \text{ и } \tilde{B}_\theta : \langle j_z \rangle \sim (1/T) \int_0^T dt \tilde{v}_r \tilde{B}_\theta, \text{ отличен от нуля.}$$

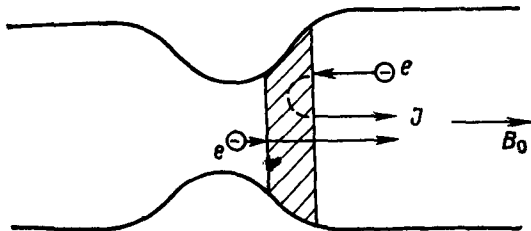
Вторая возможность использования силы Лоренца для генерации стационарного тока связана с наличием в токамаке банановых частиц. Этот ток получил название «бутстреп-тока» и подробно описан в [9]. Формально бутстреп-ток может быть получен из (1.6), если вместо радиального потока плазмы подставить его неоклассическое значение. В банановом режиме $v_r = -(q^2 \rho_e^2 v_{ei} / \epsilon^{3/2}) \partial n_e / \partial r$, где $\rho_e = m c v_{Te} / (e B_0)$, $\epsilon = a / R_0$ (см., например, [9]), так что из (1.6) следует:

$$j_z \simeq \sigma B_\theta q^2 \rho_e^2 v_{ei} / (n_e c \epsilon^{3/2}) \partial n_e / \partial r. \quad (1.7)$$

Физически механизм генерации бутстреп-тока определяется двумя факторами. Первичным является диамагнитный ток бананов, связанный с тем, что радиальный градиент давления таких частиц уравнивается компонентом силы Лоренца $(e/c) n_e v_z B_\theta$, а не $(e/c) n_e v_\theta B_z$ (банановые частицы не могут вращаться по углу θ). Возникающий при этом тороидальный ток банановых частиц под действием силы трения генерирует продольный ток пролетных электронов, который в $\epsilon^{-1/2}$ раз больше исходного и фактически определяет бутстреп-ток. Следует подчеркнуть, что в отличие от большинства других неомических методов генерации тока бутстреп-ток может лишь усиливать магнитную индукцию полоидального магнитного поля, созданного другими методами. Это следует уже из формулы (1.6): ее решение при $r \rightarrow 0$ дает разумное решение для B_θ только при $\lim_{r \rightarrow 0} v_r \sim r^{-1}$. Физически расходи-

мость скорости связана с тем, что в стационарном состоянии диффузия магнитных силовых линий к оси разряда должна компенсироваться встречным течением расширяющейся плазмы. По этой причине в большинстве проектов стационарного токамака с использованием бутстреп-тока предлагается использовать дополнительные методы, позволяющие создавать «затраповочное» полоидальное поле в центральной части плазменного шнура. В [10, 11] была высказана идея о том, что в термоядерной плазме «затра-

Рис. 1.2. Генерация тока при поперечном нагреве электронов с $v_z < 0$ в локальной пробке (область нагрева заштрихована)



вочный» ток могут генерировать рождающиеся в процессе реакции α -частицы. Появление приосевого тока связано с несимметрией радиального смещения α -частиц с $v_{\parallel} > 0$ и $v_{\parallel} < 0$. В [12] показано, что к аналогичному эффекту приводит и несимметрия ухода α -частиц на стенки камеры. Следует отметить, что в обоих случаях полученные в [10—12] стационарные решения необходимо исследовать на устойчивость. До настоящего времени этот вопрос не анализировался.

Третья возможность генерации тороидального тока за счет силы Лоренца связана с существованием в токамаке локальных минимумов тороидального магнитного поля. Наличие пробок приводит к появлению локально запертых электронов с $v_{\parallel}/v_{\perp} \ll \sqrt{\delta B_z/B_z}$ (обычно в токамаке $\delta B_z/B_z \sim 10^{-2}$). Идея использования таких электронов для генерации тока заключается в следующем [13, 14]. В области минимума магнитного поля в плазму вводится электромагнитная волна с частотой, близкой к $\omega_{Be} = eB/(mc)$. Такая волна взаимодействует с электронами, для которых выполнено условие доплеровского резонанса $k_z v_z = \omega - \omega_{Be}$, и увеличивает их поперечную энергию. Подберем частоту волн ω и направление ее распространения (знак k_z) так, чтобы волна взаимодействовала только с электронами, летящими в сторону минимума магнитного поля (пусть для этих частиц $v_z < 0$) (рис. 1.2). Тогда при прохождении зоны взаимодействия с волной электроны с $v_z < 0$ увеличат свою поперечную энергию и часть из них отразится от пробки. Электроны с $v_z > 0$ с волной не взаимодействуют. В результате этого появляется асимметрия в электронной функции распределения [$f_e(v_z > 0) > f_e(v_z < 0)$], означающая появление продольного тока.

И, наконец, существует еще возможность генерации продольного тока за счет асимметрии частоты столкновений [15] [последний член в правой части (1.1)]. Предположим, что внешний источник приводит к нагреву только таких электронов, для которых $v_z > 0$ (это может быть описанный выше ЭЦ-нагрев). Тогда электроны с $v_z > 0$ становятся «менее столкновительными», чем электроны с $v_z < 0$, поскольку $\nu_{ei} \sim E^{-3/2}$ (E — энергия электрона). Поскольку ЭЦ-нагрев не вносит в плазму продольный импульс, из (1.1) следует, что

$$\nu_{ei}^{(+)} j_e^{(+)} = \nu_{ei}^{(-)} j_e^{(-)}, \quad (1.8)$$

где $j_e^{(+)} = e \int_0^{\infty} v_z dv_z \int d\mathbf{v}_{\perp} f_e$; $j_e^{(-)} = e \int_{-\infty}^0 v_z dv_z \int d\mathbf{v}_{\perp} f_e$; $v_{ei}^{(+)}$, $v_{ei}^{(-)}$ — ча-

стоты столкновений с ионами соответственно электронов с $v_z > 0$ и с $v_z < 0$. Из неравенства $v_{ei}^{(+)} < v_{ei}^{(-)}$ следует, что суммарный электронный ток отличен от нуля:

$$j_e = j_e^{(+)} - j_e^{(-)} \simeq j_e^{(+)} (1 - v_{ei}^{(+)} / v_{ei}^{(-)}) > 0. \quad (1.9)$$

Описанная схема асимметричного нагрева может быть использована и для создания ионного тока (например, тока α -частиц) при их взаимодействии с ионно-циклотронными (ИЦ) волнами.

В заключение хотелось бы обратить внимание на следующее обстоятельство. Экспериментально и теоретически разные методы генерации стационарного тока разработаны далеко не в равной степени. Это связано как с субъективными обстоятельствами (например, с наличием соответствующей техники), так и с объективными причинами. В теоретическом отношении наиболее разработаны методы, которые обладают максимальной эффективностью генерации тока, или методы, для использования которых не требуется дополнительных источников нагрева. К последним прежде всего относится бутстреп-ток. Именно этим методам и посвящена основная часть настоящего обзора. Все остальные методы (подчас весьма интересные в физическом отношении) описаны лишь на качественном уровне в гл. 1.

1.2. Методы, основанные на внесении продольного импульса в плазму

1.2.1. Волны, использующие резонанс $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$. Методы генерации тока ВЧ-волнами с ненулевым продольным импульсом наиболее изучены теоретически и экспериментально. Если говорить о волнах, являющихся для плазмы собственными, то к ним можно отнести нижнегибридные, альфвеновские и быстрые магнитозвуковые волны. Нижнегибридные (НГ) волны — это «почти» электростатические колебания с продольной фазовой скоростью $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$, имеющие закон дисперсии (см., например, [16, 18]).

$$\omega^2 \simeq (\omega_{pe}^2 k_{\parallel}^2 + \omega_{pi}^2 k^2) (k^2 + k_{\perp}^2 \omega_{Te}^2 / \omega_{pe}^2)^{-1}. \quad (1.10)$$

Здесь $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_e / m$; $\omega_{pi}^2 = 4\pi Z_i^2 n_i / M_i$.

Поскольку для НГ-волн $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$, то такие волны резонансно взаимодействуют только с надтепловыми электронами.

Быстрые магнитозвуковые (БМЗ) волны имеют закон дисперсии (см., например, [16, 18]):

$$\omega^2 = v_A^2 k^2, \quad (1.11)$$

где $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi n_e M_i}$. В зависимости от значения k_{\parallel} (задаваемого, как и ω , внешними системами ввода), продольный компонент фазовой скорости БМЗ-волн может быть и больше, и меньше тепловой скорости электронов. Частота этих волн также может варьировать в широких пределах: $0 \leq \omega^2 \leq \omega_{\text{НГ}}^2 = \omega_{pi}^2 \omega_{ze} \omega_{Bi} / (\omega_{pi}^2 + \omega_{Be} \omega_{Bi})$.

Альфвеновские (АВ) (или медленные) волны существуют лишь при $\omega \leq \omega_{Bi}$ и описываются следующим дисперсионным уравнением [16—18]:

$$k_{\perp}^2 c^2 \simeq -\omega_{Bi} \omega_{Be} (\omega_{pi}^2 / \omega_{Bi}^2 - k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2). \quad (1.12)$$

В отличие от БМЗ-волн АВ-волны имеют фиксированную продольную фазовую скорость $\omega / k_{\parallel} = v_A$ (эта скорость одновременно является минимально возможной для БМЗ-волн). В реальных условиях токамака, когда выполнено неравенство $\beta = 8\pi n_e T_e / B_0^2 > m / M_i$, отношение продольной фазовой скорости АВ-волны к электронной тепловой меньше единицы:

$$(\omega / k_{\parallel} v_{Te})_A = \sqrt{m / (\beta M_i)} < 1. \quad (1.13)$$

Каждая из описанных выше волн обладает целым рядом специфических особенностей, оказывающих определяющее влияние на возможность их использования в токамаке реактора. Эти особенности обсудим ниже, а сейчас опишем общие принципы генерации тока такими волнами. Для этого, как и раньше, будем исходить из простейшей гидродинамической модели, приводящей к формуле (В.2). Выше уже отмечалось, что в отличие от омического метода генерации тока эффективность всех безындукционных методов обратно пропорциональна плотности плазмы. Второй характерной особенностью формулы (В.2) является ее зависимость от фазовой скорости волн.

Поскольку в этом параграфе рассматриваются ВЧ-методы с $k_{\parallel} \neq 0$, для них наиболее эффективным механизмом передачи частицам энергии и импульса является резонансное черенковское взаимодействие. При этом волна обменивается энергией и импульсом с группой резонансных электронов, для которых $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$. Из (В.2) нетрудно выделить два предельных случая взаимодействия: $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$ (случай малых фазовых скоростей) и обратный случай $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) \gg 1$. При выполнении первого неравенства волны взаимодействуют с медленными электронами, для которых входящая в (В.2) частота столкновений практически не зависит от $v_{\parallel p} = \omega / k_{\parallel} \ll v_{Te}$. Для таких волн величина $\eta \sim k_{\parallel} / \omega$. В случае $v_{\parallel p} \gg v_{Te}$ волны передают свои энергию и импульс надтепловым электронам, для которых частота столкновений обратно пропорциональна $v_{\parallel p}^3$: $v_{ei}(v_{\parallel p} \gg v_{Te}) \simeq v_{ei}(v_{Te}) \times (v_{Te} / v_{\parallel p})^3$. В результате для таких волн из (В.2) следует: $\eta \sim$

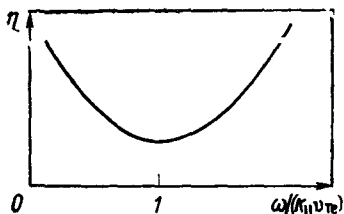


Рис. 1.3. Зависимость локальной эффективности генерации тока ВЧ-волнами от продольной фазовой скорости волны

$\sim (\omega/k_{||})^2$. Отметим сразу, что в случае $\omega/(k_{||} v_{Te}) \gg 1$ η перестает зависеть от температуры плазмы. Качественно зависимость η от отношения $\lambda = \omega/(k_{||} v_{Te})$ показана на рис. 1.3. Обращает на себя внимание тот факт, что эффективность растет в обоих предельных случаях: при $\omega/(k_{||} v_{Te}) \ll 1$ и при $\omega/(k_{||} v_{Te}) \gg 1$. При уменьшении фазовой скорости рост эффективности связан с увеличением отношения импульса волны к ее энергии: при увеличении же фазовой скорости рост η определяется уменьшением скорости диссипации импульса быстрых частиц [19,20].

Случай малых фазовых скоростей характерен для АВ и БМЗ-волн в плазме не слишком низкого давления $\beta > m/M_i$. Обратный предельный случай реализуется при использовании НГ- и БМЗ-волн. Для того чтобы оценить, какой же из двух предельных случаев дает большую эффективность генерации, нужно учесть все возможные ограничения на величины $(\omega/k_{||})_{\min}$ и $(\omega/k_{||})_{\max}$. Сверху фазовая скорость волны (вернее, возможность ее резонансного взаимодействия с электронами) для всех волн ограничена скоростью света. Кроме того, для НГ-волн существенно ограничение, связанное с критерием доступности (так называемый критерий Голанта — Стикса [16, 17]). Оказывается, что НГ-волны могут проникать в центральную часть плазменного шнура лишь тогда, когда их продольный показатель преломления $N_{||} = k_{||} c/\omega$ превышает некоторое критическое значение. В случае

$$\omega \geq 2\omega_{\text{НГ}} \quad (1.14)$$

(выполнение этого неравенства необходимо для подавления нелинейных процессов) условие доступности может быть записано следующим образом:

$$N_{||\min} \approx [1 + (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2 - (\omega_{pi}/\omega)^2]^{0.5} + \omega_{pe}/\omega_{Be}. \quad (1.15)$$

В реальных условиях реактора-токамака с $B_0 = 6$ Тл, $\bar{n}_e = 1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ из (1.15) следует $N_{||\min}^2 \approx 2$. Рассмотрим теперь ограничения на минимальную фазовую скорость волн. Прежде всего и для АВ-, и для БМЗ-волн в силу их дисперсии $(\omega/k_{||})_{\min} = v_A$. В условиях реактора-токамака при $\beta \approx 4 \rightarrow 5\%$ $(\omega/k_{||} v_{Te})_{\min} \approx 0,15$. Существует, однако, еще одно, не менее жесткое, ограничение на $(\omega/k_{||})_{\min}$.

Оно связано с наличием в плазме токамака банановых электронов, которые из-за наличия сильной продольной вязкости не могут двигаться вдоль силовых линий. Следовательно, передача импульса таким электронам не приводит к генерации продольного тока и уменьшает η . Поскольку характерная продольная скорость банановых электронов $v_{\parallel} \sim v_{Te} \sqrt{\epsilon}$, то для эффективной генерации тока требуется выполнение неравенства

$$\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) \geq \sqrt{\epsilon}. \quad (1.16)$$

Анализ формулы (В.2) с учетом описанных ограничений на фазовую скорость волн показывает, что эффективность генерации волн в двух предельных случаях $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) \gg 1$ и $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$ сравнима по порядку. Более строгий теоретический анализ зависимости η от ω / k_{\parallel} приведен в гл. 2. Здесь же рассмотрим другие аспекты применимости ВЧ-волн с $k_{\parallel} \neq 0$ для генерации стационарного тока. Особенности возбуждения, распространения и взаимодействия с плазмой различных типов волн достаточно подробно описаны в других изданиях (см., например, [16—18, 21]). Кратко опишем лишь те из них, которые имеют существенное значение для проблемы генерации тока.

Начнем с наиболее исследованных НГ-волн. Выше уже говорилось о том, что такие волны эффективно проникают в плазму лишь при достаточно большом продольном замедлении (1.14). Поскольку даже в сравнительно небольших токамаках для НГ-волн выполнено неравенство $\lambda/a = 2\pi c / (\omega a) < 1$ ($\lambda \lesssim 30$ см), то в большинстве экспериментов НГ-волны возбуждаются с помощью системы сфазированных волноводов, позволяющей формировать на входе в плазму оптимальный для генерации тока спектр волн по N_{\parallel} [22]. Использование «бесконтактной» системы ввода позволяет рассчитывать на применимость этого метода и в условиях реактора-токамака. Однако по мере роста размеров плазмы, ее плотности и магнитной индукции поля в соответствии с (1.10) и (1.14) должна уменьшаться длина НГ-волны (в условиях реактора-токамака с $B_0 = 6$ Тл $\bar{n}_e = 1 \cdot 10^{20}$ м⁻³, $\lambda \approx 3$ см). Это приводит к двум серьезным следствиям. Во-первых, резко увеличивается оптическая толщина плазмы $L = \lambda_{\perp}^{-1} a \approx a \omega_{pe} / c$ (в реакторе $L \sim 10^3$). Как известно, с ростом L увеличивается вероятность «преждевременной» потери энергии волн и искажения их спектра в результате процессов рассеяния, резонансного поглощения и переизлучения волн. В токамаке эта ситуация усугубляется наличием регулярной неоднородности магнитного поля по полоидальному углу, приводящей к дополнительной трансформации спектра. Во-вторых, уменьшение длины волны заставляет приближать систему возбуждения к границе плазмы, в противном случае волны с достаточно большим продольным замедлением отразятся от вакуумного промежутка и не проникнут в плазму. Оба эти фактора делают весьма проблематичной возможность использования НГ-волн в вы-

сокотемпературном реакторе-токамаке, хотя для современных экспериментов этот метод, по-видимому, оптимален. Серьезной проблемой для НГ-волн может стать и наблюдаемая в ряде экспериментов аномальная диффузия пучка быстрых электронов поперек удерживающего магнитного поля. В режимах с малой плотностью (когда частота столкновений таких электронов с основной плазмой достаточно мала) этот канал потерь может стать определяющим в энергобалансе пучка и заметно снизить η . Правда, оценки показывают, что в условиях плотной плазмы реактора его роль должна быть мала. И, наконец, отметим, что поскольку генерация тока НГ-волнами сопровождается появлением в плазме пучка ускоренных электронов с $|\partial i_e / \partial v_{\parallel}| < |\partial i_e / \partial v_{\perp}|$, то такой пучок должен быть неустойчив относительно раскачки колебаний на аномальном доплер-эффекте [23, 24]. Подробное теоретическое описание этой неустойчивости приведено в обзоре [25], здесь же отметим, что в экспериментах по генерации тока НГ-волнами эта неустойчивость (неоднократно наблюдаемая) может играть важную роль. Во-первых, ее появление сопровождается уменьшением эффективности генерации тока из-за включения мощного механизма «квазиупругого» рассеяния быстрых электронов на колебаниях [26]. Кроме того, в экспериментах с неоптимальным спектром НГ-волн неустойчивость на аномальном доплер-эффекте может играть положительную роль. Именно ее появление сопровождается нелинейной трансформацией спектра НГ-волн, приводящей к появлению колебаний с малыми фазовыми скоростями [27], практически не излучаемыми системами ввода и необходимыми для создания пучка быстрых электронов.

Обратимся теперь к БМЗ-волнам, имеющим меньшую частоту $\omega < \omega_{\text{НГ}}$ и описываемым законом дисперсии (1.11). Основной особенностью этих волн (в отношении возможности генерации тока) является возможность их использования как в режиме с малой фазовой скоростью $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) < 1$, так и в обратном случае $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) > 1$. Если говорить о пределе $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) > 1$, то преимущество БМЗ-волн по сравнению с НГ-волнами состоит в отсутствии критерия Голанта—Стикса, что позволяет «удлинить» область пучка вплоть до скорости света (с соответствующим увеличением η). К преимуществу БМЗ-волн следует отнести и тот факт, что в пределе $k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be} < 1$ оператор квазилинейного взаимодействия таких волн с электронами пропорционален v_{\perp}^2 , т. е. БМЗ-волны легче ускоряют электроны, имеющие достаточно большую поперечную энергию. Образующийся при таком взаимодействии пучок надтепловых электронов менее диссипативен, чем в случае НГ-волн, соответственно увеличивается и эффективность генерации тока. И, наконец, для БМЗ-волн плазма обладает гораздо меньшей оптической толщиной, чем для НГ-волн (в реакторе $L_{\text{БМЗ}} \leq 10^3$), что позволяет рассчитывать на использование БМЗ-волн даже в реакторах с $a \geq 3$ м.

Однако, к сожалению, все описанные выше преимущества БМЗ-волн с $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) > 1$ могут быть в полной мере реализованы лишь в условиях высокотемпературной плотной плазмы реактора-токамака. Использование же этих волн в современных токамаках с умеренными параметрами ($a=30$ см, $T_e \sim 1$ кэВ, $\bar{n}_e \sim 1 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$) сопряжено со многими объективными трудностями. Самая существенная из них связана с тем, что декремент затухания БМЗ-волн достаточно мал (см. например, [18]), так что характерная длина их затухания $l = \omega/(k_{\perp} \gamma) \sim 1/(n_e T_e)$ намного больше размеров токамака.

Можно сказать, что в современных экспериментах плазменный шнур токамака служит для БМЗ-волн высокодобротным резонатором, так что для обеспечения поглощения значительной ВЧ-мощности необходимо поддерживать в плазме очень высокий уровень «индуктивной» ВЧ-энергии, что нежелательно ввиду возможности возбуждения различных нелинейных процессов. Кроме того, в условиях $l \gg a$ трудно контролировать радиальное распределение поглощаемой ВЧ-энергии, а следовательно, и профиль ВЧ-тока.

Очень неплохой перспективой для реактора-токамака обладают и БМЗ-волны с малой фазовой скоростью $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$. Однако и их использование в современных экспериментах затруднено в силу весьма малого декремента затухания. Кроме того, использование для генерации стационарного тока ВЧ-волн с малыми фазовыми скоростями в условиях современных экспериментов имеет еще один серьезный недостаток. Именно, из (В.2) следует, что для волн с $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) \gg 1$ эффективность генерации тока практически не зависит от температуры плазмы (вернее, зависит от нее логарифмически). Что же касается волн с $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$, то для них в соответствии с (В.2)

$$\eta \sim k_{\parallel} / (\omega v_{ei}) \sim T_e^{3/2} / n_e. \quad (1.17)$$

Зависимость η от T_e сильно снижает эффективность генерации тока ВЧ-волнами с $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$ в современных экспериментах и делает их неконкурентоспособными на настоящем этапе исследований. И, наконец, наиболее низкочастотными из всех рассматриваемых собственно ВЧ-волн является АВ-волна с $\omega \lesssim \omega_{Vi}$. Эти волны при $\beta > m/M_i$ попадают в разряд волн с $\omega/(k_{\perp} v_{Te}) \ll 1$, так что все предыдущие рассуждения относятся и к ним. Оставляя в стороне очень интересный вопрос о распространении этих волн в неоднородной плазме (см., например [21] и цитированную там литературу), здесь лишь кратко укажем на следующие особенности АВ-волн. Из закона дисперсии (1.11) следует, что в плазме с неоднородным магнитным полем АВ-волны имеют область конверсии, вблизи которой происходит их трансформация в коротковолновые сильнозатухающие плазменные колебания. Таким образом, АВ-волны (как и циклотронные волны) имеют в условиях

токамака достаточно узкую область выделения энергии, положение которой контролируется частотой генератора и системой ввода, задающей значение k_{\parallel} . Вообще говоря, эта особенность должна быть отнесена к преимуществу АВ-волн, хотя возможность его практической реализации нуждается в более детальном исследовании.

Отметим еще одну потенциальную опасность снижения эффективности генерации тока в реакторе-токамаке для всех волн с частотой $\omega \gg \omega_{Vi}$. Дело в том, что волны с $\omega \gg \omega_{Vi}$ могут в той или иной степени взаимодействовать с ионами, особенно с высокоэнергетическими α -частицами. Для волн с $\omega > \omega_{Vi}$ из-за неоднородности магнитного поля токамака в объеме плазмы может встретиться область доплеровского резонанса с $\omega = n\omega_{Vi}$. Волны с $\omega \gg \omega_{Vi}$ (НГ-волны) могут взаимодействовать с ионами через стохастический механизм ускорения [28], сводящийся в пределе большой амплитуды волн к черенковскому резонансу плазмы без магнитного поля $\omega = kv$. К сожалению, этот вопрос практически не исследован.

1.2.2. Инжекция пучков нейтральных атомов. Механизм генерации тока пучком нейтральных атомов также основан на внесении в плазму извне продольного импульса. Но поскольку этот импульс в основном связан с движением ионов, то для принятого в этой главе гидродинамического описания необходимо использовать систему уравнений движения для электронов, ионов плазмы и пучка вдоль магнитного поля:

$$n_e m d u_e / dt = -v_{eb} n_e m (u_e - u_b) - v_{ei} m n_e (u_e - u_i); \quad (1.18)$$

$$n_i M_i d u_i / dt = v_{ei} n_e m (u_e - u_i) - v_{ib} n_i \tilde{M} (u_i - u_b) - M_i \mu_i \Delta_{\perp} u_i; \quad (1.19)$$

$$M_b \frac{d}{dt} n_b u_b = F + v_{eb} n_e m (u_e - u_b) + v_{ib} n_i \tilde{M} (u_i - u_b), \quad (1.20)$$

где индекс b относится к ионам пучка, а i — к ионам плазмы; $v_{ei} = \langle \sigma_{ei} v_{Te} \rangle n_i$; $v_{eb} \simeq \langle \sigma_{eb} v_{Te} \rangle n_b$; $v_{ib} = \langle \sigma_{ib} u_b \rangle n_b$; $\tilde{M} = M_i M_b / (M_i + M_b)$; μ_i — ионная вязкость. Внешняя сила F в уравнении (1.19) связана с удельной мощностью источника быстрых нейтралов p : $p = F u_b$. Отметим сразу, что сила трения частиц пучка об ионы плазмы зависит от скорости пучка: при выполнении естественного неравенства $u_b \gg v_{Ti} = \sqrt{2T_i / M_i}$: $v_{ib} \sim u_b^{-3}$. Что же касается зависимости v_{eb} от u_b , то она гораздо более слабая в силу обычно выполненного условия $u_b \ll v_{Te}$. В стационарном случае сумма уравнений (1.18) — (1.20) дает выражение для скорости вращения ионного компонента плазмы вдоль магнитного поля:

$$u_i \simeq F a^2 / (\mu_i M_i). \quad (1.21)$$

Эта скорость (вообще говоря, являющаяся важной характеристикой состояния плазмы) в пределе $u_i \ll u_b$ практически не влияет на ток. Ниже показано, что максимум эффективности генерации тока пучком достигается при выполнении условия

$u_b \gg v_{Ti}$. С учетом этого неравенства и условия $Z_b^2 n_b \ll Z_i^2 n_i$ из (1.18) — (1.20) следует:

$$j = Z_b e n_b u_b - e n_b (u_e - Z_i u_i) \simeq Z_b e n_b u_b (1 - Z_b/Z_i). \quad (1.22)$$

Выражая из (1.20) u_b через p , получаем при условии $u_b \gg u_e$, u_i :

$$\eta_b = \frac{|j|}{p} = e Z_b \frac{|1 - Z_b/Z_i|}{u_b (\langle \sigma_{eb} v_{Te} \rangle n_e m + \langle \sigma_{ib} u_b \rangle n_i \tilde{M})}. \quad (1.23)$$

Формула (1.23) функционально похожа на формулу (В2) для случая $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$ и отличается от нее двумя факторами. Первое отличие связано с тем, что ионы пучка передают свой импульс не только электронам, но и ионам. Это приводит к появлению в знаменателе (1.23) суммы частот $v_{be} m + v_{bi} \tilde{M}$ и естественно снижает эффективность. Второе отличие связано с тем, что быстрые ионы пучка (в отличие от ВЧ-волн) также переносят ток. Поэтому полный ток определяется разностью тока пучка и «экраширующего» тока электронов. Это приводит к появлению «резонансной» зависимости $\eta_b \sim |1 - Z_b/Z_i|$ — при совпадении эффективного заряда ионов плазмы и пучка они становятся неразличимыми для электронов. Более строгий анализ зависимости η_b от параметров плазмы и пучка стал возможным после появления целого ряда теоретических работ [29—33], учитывающих различные кинетические эффекты.

Прежде всего, в [29] была учтена конечность отношения скорости пучка u_b к тепловой скорости электронов v_{Te} . Дело в том, что при выполнении неравенства $v_{Ti}/v_{Te} \ll u_b/v_{Te}$ сечение рассеяния электронов на ионах плазмы и пучка даже при совпадении эффективных зарядов последних отличается на фактор порядка $(u_b/v_{Te})^2 < 1$, т. е. $\sigma_{eb}/\sigma_{ei} \sim 1 - \alpha (u_b/v_{Te})^2$, где α — числовой коэффициент порядка единицы. Однако более важным представляется проведенный впервые в [30] учет влияния запертых частиц на η_b . В рассматриваемом случае роль запертых частиц сводится к эффективному уменьшению подвижности электронов плазмы примерно в $1 - \sqrt{\epsilon}$ раз [можно сказать, что эффективный заряд ионов плазмы увеличивается в $(1 - \sqrt{\epsilon})^{-1}$ раз]. Поэтому даже при $Z_b = Z_i$ электроны плазмы не могут скомпенсировать ток пучка, и «резонансный» член в $\eta_b \sim 1 - Z_b/Z_i$ заменяется членом $1 - (Z_b/Z_i) \times (1 - \sqrt{\epsilon})$.

В настоящее время общепринято следующее выражение для эффективности генерации тока инжекцией пучка нейтральных атомов [31, 32]:

$$\frac{I}{P_Q} = \frac{\tau_b}{2\pi R_0} = \frac{\tau_s u_b Z_b e}{2\pi R_0 (1 + \alpha^2) E_0} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} + 1,46 \sqrt{\epsilon} A \frac{Z_b}{Z_i} \right), \quad (1.24)$$

где

$$\tau_s = 3m v_{Te}^3 M_b / (16 \sqrt{\pi} e^4 Z_b^2 n_e \Lambda);$$

$$\alpha^3 = 0,75 \sqrt{\pi m v_{Te}^3} \left[\sum_i n_i Z_i^2 / (n_e M_i) \right] / u_b^3; \quad E_0 = M_b u_b^2 / 2;$$

$$A = A(Z_i) \simeq 1.$$

Анализ (1.24) показывает, что оптимальной эффективностью для генерации тока обладают нейтралы с энергией $E_b^{кр} / T_i \sim \sim (M_i / m)^{1/3}$ (при $T_i \simeq T_e$). При уменьшении энергии пучка ниже $E_b^{кр}$ его энергия начинает теряться на трение об ионы, с увеличением $E_b > E_b^{кр}$ происходит падение эффективности в результате уменьшения отношения импульса частиц и их энергии.

Формула (1.24) дает приемлемую (в отношении экономичности реактора) эффективность генерации тока. Существует, однако, несколько факторов, не позволяющих сделать окончательный вывод о перспективности этого метода для создания стационарного тока в реакторе-токамаке. Прежде всего это проблема создания мощных пучков с энергией порядка мегаэлектрон-вольт. Ограничение снизу на энергию пучка вносит даже не условие максимума эффективности, а условие возможности транспортировки пучка к центральной части плазменного шнура. Технология изготовления таких источников практически не развита. Другой серьезной проблемой является неизбежная при таком методе тороидальная «раскрутка» плазмы. Она может привести к появлению неустойчивостей баллонного типа и последующему ограничению на предельное давление плазмы.

Для подавления эффекта ускорения плазмы в тороидальном направлении был предложен метод «встречных пучков» [1, 33], суть которого заключается в следующем. Основной пучок (с большей энергией) взаимодействует в основном с электронами, создавая ток. Встречный пучок (т. е. пучок с противоположным направлением продольного импульса) обладает меньшей энергией и взаимодействует в основном с ионами, компенсируя вызванную основным пучком раскрутку плазмы. Ясно, что использование этого метода приводит к соответствующему уменьшению эффективности генерации тока.

1.2.3. Уменьшение эффективности при передаче импульса запертым электронам. Выше говорилось о том, что некоторые методы генерации тока [волны с $\omega / (k_{\parallel} v_{Te}) \ll 1$, пучки нейтралов, волны с $\omega \simeq n \omega_{pe}$] приводят к взаимодействию с группой банановых частиц, запертых в неоднородном магнитном поле токамака. Поскольку такие частицы под действием внешней силы не могут ускоряться вдоль магнитного поля (т. е. участвовать в создании продольного тока), обычно полагают, что часть импульса и энергии источника тока, поглощенная запертыми электронами, не создаст тока. Однако известно, что в токамаке в силу тороидальной симметрии сохраняется тороидальный компонент обобщенного импульса частиц. Поэтому вопрос о том, куда тратится тороидальный компонент импульса запертых электронов, полученный ими от

внешнего источника, не столь тривиален. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Кинетика резонансного взаимодействия ВЧ-волн с банановыми электронами детально рассмотрена в гл. 2. Здесь же ограничимся простейшей гидродинамической моделью, использованной в [34]. Эта модель состоит из системы уравнений, выражающих закон сохранения импульса для усредненных по магнитным поверхностям тороидального и радиального компонентов импульса пролетных и запертых электронов и ионов в пренебрежении диамагнитными эффектами ($\nabla p = 0$) для плазмы, находящейся в стационарном состоянии:

$$-en_B E_r + (en_B B_\theta / c) u_e^B + R_{rc}^B = 0; \quad (1.25)$$

$$en_B E_r - (en_B B_\theta / c) u_i^B + R_{ri}^B = 0; \quad (1.26)$$

$$-(en_B B_\theta / c) u_r + F_B + R_{ze}^B = 0; \quad (1.27)$$

$$(en_B B_\theta / c) u_r + R_{zi}^B = 0; \quad (1.28)$$

$$F_{ii} + R_{ze}^n = 0; \quad (1.29)$$

$$R_{zi}^n - \mu_i u_i^n = 0, \quad (1.30)$$

где $u_i^B, u_i^n, u_e^B, u_e^n$ — тороидальные скорости пролетных и запертых ионов и электронов соответственно; R — кулоновское трение (см. ниже); член $\mu_i u_i^n$ описывает ионную вязкость и некулоновское трение (например, о нейтралы); F_n, F_B — удельная сила, действующая соответственно на пролетные и запертые электроны со стороны ВЧ-волн. При выводе (1.25) — (1.30) пренебрегалось радиальным движением пролетных частиц, а движение по радиусу запертых электронов и ионов считалось амбиполярным. Считая долю запертых частиц $n_{ij}/n_{ii} \sim \sqrt{\varepsilon}$ малой, выражения, описывающие кулоновское трение, можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} R_{re}^B &\simeq -mn_e \sqrt{\varepsilon} (v_{ee} + v_{ei}) u_r; \\ R_{ri}^B &\simeq -M_i n_e \sqrt{\varepsilon} (v_{ii} + v_{ie}) u_r; \\ R_{ze}^n &\simeq -mn_e v_{ei} (1 - \sqrt{\varepsilon}) (u_e^n - u_i^n) + \\ &\quad + mn_e \sqrt{\varepsilon} [v_{ee} (u_e^B - u_e^n) + v_{ei} (u_i^B - u_i^n)]; \\ R_{ze}^B &\simeq -mn_e v_{ee} \sqrt{\varepsilon} (u_e^B - u_e^n) - mn_e \sqrt{\varepsilon} v_{ei} (u_e^B - u_i^n); \\ R_{ri}^B &\simeq -M_i n_e \sqrt{\varepsilon} v_{ii} (u_i^B - u_i^n) - M_i n_e \sqrt{\varepsilon} v_{ie} (u_i^B - u_e^n); \\ R_{zi}^n &\simeq mn_e v_{ei} (1 - \sqrt{\varepsilon}) (u_e^n - u_i^n) + \\ &\quad + M_i n_e \sqrt{\varepsilon} [v_{ii} (u_i^B - u_i^n) + v_{ie} (u_e^B - u_i^n)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Подставив эти выражения в (1.25)–(1.30), получим замкнутую систему уравнений для u_e , u_i и E_r . Исследование системы в предположении $\gamma_{ei}/\omega_{\theta e} \ll 1$ ($\omega_{\theta e} = eB_{\theta}/mc$) позволяет сделать следующие выводы.

Импульс, получаемый запертыми электронами от ВЧ-волн, приводит к их радиальному дрейфу со скоростью

$$u_r = cF_B / (en_B B_{\theta}). \quad (1.32)$$

В результате этого дрейфа возникает радиальное электрическое поле

$$E_r \simeq \frac{B_{\theta}}{c} \left(u_i^n + \frac{F_B \sqrt{m/M_i}}{n_B m v_{ei}} \right), \quad (1.33)$$

приводящее, в свою очередь, к тороидальному дрейфу электронов и ионов с характерной скоростью

$$u_e^B \simeq u_i^B \simeq cE_r / B_{\theta} = u_i^n + F_B \sqrt{m/M_i} / (n_B m v_{ei}). \quad (1.34)$$

Таким образом, резонансное взаимодействие ВЧ-волн с запертыми электронами практически не приводит к появлению продольного тока, а вызывает тороидальный дрейф банановых электронов и ионов. И, наконец, из системы (1.25)–(1.30) следует, что плотность генерируемого тока определяется выражением

$$j \simeq -[e/(m v_{ei})](F_n + \sqrt{m/M_i} F_B). \quad (1.35)$$

Последний член в правой части (1.35) эквивалентен току, создаваемому пучком нейтральных атомов (банановых частиц), движущихся со скоростью, много меньшей тепловой скорости ионов.

1.3. Методы, не связанные с внесением внешнего импульса

1.3.1. Циклотронные волны ($\omega = n\omega_{Be}$, $\omega = n\omega_{Bi}$). Идея генерации тока ЭЦ-волнами была впервые высказана в [15]. Упрощенное выражение для эффективности генерации ЭЦ-волнами можно получить с помощью модельных уравнений, описывающих несимметричный нагрев электронов волнами. Как известно, ЭЦ-волны взаимодействуют с электронами, удовлетворяющими условию доплеровского резонанса $v_{zP} = (\omega - \omega_{Be}) / k_z$. Выбирая частоту генератора и направление распространения пучка волн так, чтобы в области взаимодействия было выполнено условие $k_z > 0$, $\omega > \omega_{Be}$, можно добиться преимущественного нагрева электронов с $v_{zP} > 0$. В случае $(\omega - \omega_{Be}) / \omega \ll 1$ ЭЦ-нагрев практически приводит к увеличению только поперечной энергии резонансных электронов. Характерное приращение этой энергии ΔE нетрудно оценить из баланса вводимой ВЧ-мощности и потери ΔE в результате столкновений резонансных электронов с остальными электронами и ионами:

$$n_p d\Delta E / dt = p - v_e (E_p) n_p \Delta E. \quad (1.36)$$

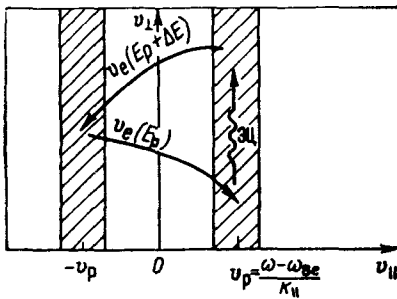


Рис 1.4. Схема генерации тока при асимметричном поперечном ЭЦ-нагреве электронов (стрелками обозначен поток электронов в фазовом пространстве)

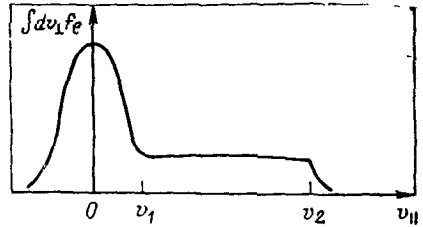


Рис 1.5. Зависимость электронной функции распределения от продольной скорости при генерации тока НГ-волнами

$$[v_1 = (\omega/k_{||})_{\min}, \quad v_2 = (\omega/k_{||})_{\max}]$$

Здесь n_p — плотность резонансных частиц; E_p — их энергия; p — удельная вводимая ВЧ-мощность. Выше уже отмечалось, что нагрев приводит к анизотропии функции распределения в пространстве скоростей. В силу зависимости частоты столкновений от скорости такая анизотропия порождает направленный поток электронов вдоль магнитного поля, т. е. электронный ток. Его можно оценить как

$$j = e \Delta n_p v_{||p}, \quad (1.37)$$

где Δn_p — несимметричная часть плотности электронов с энергией E_p :

$$\Delta n_p = n_p^{(+)}(E_p) - n_p^{(-)}(E_p). \quad (1.38)$$

Здесь $n_p^{(+)}$, $n_p^{(-)}$ — плотность электронов с энергией E_p и $v_{||} > 0$ и $v_{||} < 0$ соответственно (рис. 1.4).

Уравнения для $n_p^{(+)}$, $n_p^{(-)}$ могут быть записаны в виде

$$dn_p^{(+)} / dt = n_p^{(-)} v_e(E_p) - n_p^{(+)} v_e(E_p + \Delta E); \quad (1.39)$$

$$dn_p^{(-)} / dt = -dn_p^{(+)} / dt. \quad (1.40)$$

Вычитая (1.40) из (1.39), получаем

$$d\Delta n_p / dt = 2[n_p^{(-)} v_e(E_p) - n_p^{(+)} v_e(E_p + \Delta E)]. \quad (1.41)$$

Считая, что $\Delta E / E_p \ll 1$ $n_p^{(+)} = n_p^{(-)} + \Delta n_p$, получаем

$$\Delta n_p \simeq -n_p \frac{1}{v_e} \frac{\partial v_e}{\partial E} \Delta E, \quad (1.42)$$

что с использованием (1.36) и (1.37) дает:

$$\eta_{\text{ЭЦ}} = ek_{||} [m v_e(E_p) | \omega - \omega_{ce} |]. \quad (1.43)$$

Формула (1.43) по порядку совпадает с формулой для эффективности генерации тока ВЧ-волнами, обладающими продольным им-

пульсом (В.2) с той лишь оговоркой, что (1.43) справедлива только при $v_{\parallel p} \gg v_{Te}$. При уменьшении $v_{\parallel p}$ вплоть до $v_{\parallel p} < v_{Te}$ эффективность генерации ЭЦ-волнами резко падает.

Существует еще одно принципиальное физическое отличие формулы (1.43) от формулы (В.2) для генерации тока волнами с $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$. Для того чтобы понять это отличие, придется обратиться к кинетике взаимодействия ВЧ-волн с резонансными электронами.

Как известно, ВЧ-волны, взаимодействующие с электронами за счет черенковского резонанса $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$, увеличивают продольную скорость резонансных электронов. Если спектр волн по k_{\parallel} достаточно широкий, то электрон при последовательном прохождении резонансов может увеличить свою скорость от $v_1 = (\omega/k_{\parallel})_{\min}$ до $v_2 = (\omega/k_{\parallel})_{\max}$.

Для волн с $\omega/(k_{\parallel} v_{Te}) \gg 1$ квазилинейное ускорение приводит к появлению на функции распределения пучка электронов с $v_1 \leq v_{\parallel} \leq v_2$ (рис. 1.5). Как показано ниже, η в этом случае практически зависит лишь от скорости v_2 , а от v_1 зависят сам ток и поглощаемая ВЧ-мощность [$j, p \sim \exp(-v_1^2/v_{Te}^2)$]. В случае ЭЦ-волн квазилинейное взаимодействие увеличивает в основном поперечную скорость резонансных частиц. Поэтому использование широкого по k_z спектра ЭЦ нецелесообразно, так как в этом случае η (как и плотность тока) определяется скоростью $v_1 = [(\omega - \omega_{pe})/k_{\parallel}]_{\min}$.

Более строгое кинетическое описание процесса генерации тока ЭЦ-волнами проведено ниже, здесь же обсудим ряд физических особенностей этого метода, которые могут играть роль при практическом выборе метода генерации тока в реакторе-токамаке. Несомненным достоинством ЭЦ-волн является сильная зависимость положения области выделения энергии от магнитного поля, т. е. способность генерировать ток на выделенной магнитной поверхности. Эта особенность может оказаться решающей при необходимости локального изменения профиля тока (например, для стабилизации МГД-неустойчивостей или для создания «затравочного» тока в центре плазмы при использовании бутстреп-тока). К недостатку ЭЦ-метода можно отнести его способность переводить при нагреве быстрые электроны в банановую область, что приводит к снижению эффективности генерации [35—37].

Отметим также, что в современных условиях $\eta_{ЭЦ}$ заметно ниже $\eta_{НГ}$ для волн, использующих черенковский резонанс, в силу того, что для ЭЦ-волн $\eta_{ЭЦ} \sim v_1^2 \leq 10 v_{Te}^2 (v_1 \leq 3v_{Te})$, а для, например, НГ-волн $\eta_{НГ} \sim v_2^2 \sim c^2/2$. Отсюда следует, что $\eta_{ЭЦ}/\eta_{НГ} \sim 40T_e/(mc^2)$; это отношение становится порядка единицы лишь при $T_e \gg 10$ кэВ.

Из проведенного рассмотрения следует, что механизм создания продольного тока при асимметричном нагреве применим не

только к электронам, но и к ионам. Приведем результаты [38] для простейшего случая несимметричного нагрева пучка ионов (например, α -частиц) с $n_b/n_e \ll 1$ и $E_b \gg T_i$ (однако $u_b = \sqrt{2E_b/M_b} \ll v_{Te}$). Такой нагрев может быть осуществлен с использованием, например, БМЗ-волн с частотой, равной (или кратной) циклотронной частоте ионов пучка. Заранее ясно, что основным отличием рассматриваемого случая от описанного выше механизма генерации тока ЭЦ-волнами будет появление «экранирующего» тока электронов (как и при инжекции пучка нейтралов). Будем для упрощения считать выполненными неравенства $u_i \ll u_e \ll u_b$ (левое неравенство является следствием равенства нулю суммарного импульса плазмы, правое неравенство следует из условий $j_e = -en_e u_e \simeq j_b = Z_b e \Delta n u_i$ и $n_b/n_e \ll 1$). В этом случае для описания механизма генерации тока достаточно проанализировать следующие уравнения:

$$n_b \cdot d\Delta E_b/dt = p - (M_i v_{bi} + m v_{be}) n_b \Delta E_b. \quad (1.44)$$

Здесь ΔE_b — характерное превышение энергии частиц пучка с $u_b > 0$ над энергией частиц с $u_b < 0$:

$$\frac{d\Delta n_b}{dt} \simeq n_b \frac{\partial v_{bi}}{\partial E_b} \Delta E_b - \Delta n_b \left(v_{bi} + \frac{m}{M_i} v_{eb} \right), \quad (1.45)$$

где $\Delta n_b = n_b(u_b > 0) - n_b(u_b < 0)$. И, наконец, замыкают систему уравнения

$$j_b = Z_b \Delta n_b e u_b \quad (1.46)$$

и

$$m n_e \cdot d u_e / dt = m \Delta n_b v_{be} u_b - m n_i v_{ei} u_e. \quad (1.47)$$

Прежде всего, из (1.44), (1.45) находим Δn_b :

$$\Delta n_b = p \frac{\partial v_{bi} / \partial E_b}{[v_{bi} + (m/M_i) v_{eb}]^2}. \quad (1.48)$$

Из (1.47) и (1.48) следует:

$$j_b = \frac{e Z_b u_b p \partial v_{bi} / \partial E_b}{[v_{bi} + (m/M_i) v_{eb}]^2}. \quad (1.49)$$

$$j_e \simeq j_b v_{eb} n_e / (Z_b n_i v_{ei}). \quad (1.50)$$

Полный ток в плазме определяется разностью тока пучка и «экранирующего» тока электронов:

$$j = j_b - j_e = j_b (1 - Z_b/Z_i), \quad (1.51)$$

а эффективность генерации тока ИЦ-волнами с учетом неравенства $E_b \gg T_i$:

$$\eta_{\text{ИЦ}} \simeq \frac{e Z_b v_{bi} |1 - Z_b/Z_i|}{M_i u_b [v_{bi} + (m/M_i) v_{eb}]^2}. \quad (1.52)$$

Эффективность генерации тока ИЦ-волнами достигает максимума при $E_b \simeq T_e (M_b/m)^{1/3}$, когда

$$\eta_{\text{ИЦ}} \simeq \frac{e Z_b |1 - Z_b/Z_i|}{M u_b v_{bi}}, \quad (1.53)$$

и дает значение $\eta_{\text{ИЦ}}$, по порядку сравнимое с эффективностью генерации тока пучком нейтралов. Однако по сравнению с последним ИЦ-волны обладают рядом существенных преимуществ, которые в условиях реактора могут оказаться решающими. Во-первых, создание тока ИЦ-волнами не сопровождается «раскруткой» плазмы в тороидальном направлении. Во-вторых, их использование технически проще, поскольку опирается на уже развитые методы генерации волн (напомним, что генерация тока быстрыми атомами требует создания источника нейтралов с энергией $E \sim 1$ МэВ). Правда, как и любой другой метод, ИЦ-волны обладают не только достоинствами, но и недостатками. Самый серьезный из них — неизбежная потеря части ВЧ-энергии при черенковском взаимодействии волн с электронами. Подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данного обзора. Укажем лишь, что вопросы распространения и затухания ИЦ-волн в плазме токамака достаточно подробно изучены в [39—41].

Выше был рассмотрен основной (в отношении перспективности использования в реакторе) механизм генерации тока циклотронными волнами. Все остальные предложенные схемы, так или иначе использующие ЭЦ-волны, в силу описываемых ниже причин вряд ли могут представлять практический интерес. Поэтому уровень их теоретической проработки существенно ниже и фактически ограничивается принятым в этой главе гидродинамическим рассмотрением. К таким схемам прежде всего следует отнести высказанную в [13, 14] идею об использовании ЭЦ-волн для создания несимметрии в функции распределения локально запертых электронов по продольной скорости. Наличие локальных минимумов тороидального магнитного поля приводит к нарушению аксиальной симметрии плазмы, что позволяет переводить приращение поперечной энергии заряженной частицы в энергию направленного продольного движения. Рассмотрим участок плазменного столба, заключенный между двумя соседними локальными пробками, (см. рис. 1.2); характерная длина этого участка $\Delta l = 2\pi R_0 / N$, где N — количество катушек (вообще говоря N может быть равно единице, если одна из катушек создает большую пробку, чем все остальные). Предположим, что глубина гофрировки $\delta = (B_{\text{max}} - B_{\text{min}}) / B_{\text{max}} \ll 1$ и вблизи пробки находится источник ЭЦ-нагрева, резонансно взаимодействующий с электронами, движущимися в направлении максимума магнитной индукции поля [селективность нагрева достигается выбором нужного знака продольного компонента волнового вектора k_z и частоты волны: $\nu_{z\text{p}} = (\omega - \omega_{\text{Be}}) / k_z$]. При таком нагреве все электроны, получившие приращение поперечной энергии $\Delta E_{\perp} > m v_{\parallel}^2 / (2\delta)$, отражаются от магнитной пробки, т. е. увеличивают свою продольную скорость $v_z \approx \sqrt{2\delta \Delta E_{\perp} / m}$. Количество таких частиц определяется уравнением баланса

$$dn_p/dt = P/\Delta E - n_p v_{ei}(\Delta E_{\perp}). \quad (1.54)$$

Первый член в правой части (1.54) описывает генерацию запертых частиц с $v_z > 0$ в результате нагрева и отражения от пробки, а второй член — потерю таких частиц вследствие электрон-ионных столкновений. Эффективность генерации тока таким методом может быть оценена по формуле

$$\eta = \frac{en_p v_z}{P} = \frac{e \sqrt{2\delta \Delta E_{\perp}} / m}{\Delta E_{\perp} v_{ei} (\Delta E_{\perp})} \approx \frac{e \sqrt{\delta} \Delta E_{\perp}}{m v_{ei} v_{Te} T_e}. \quad (1.55)$$

Из (1.55) следует, что даже в случае $\Delta E_{\perp} \gg Te$ значение η в $\sqrt{\delta}$ раз меньше, например, для НГ-волн. Это естественный результат, если учесть, что значение генерируемого тока пропорционально продольной скорости резонансных частиц. Специфика же данного метода заключается как раз в том, что в силу малости изменения магнитного поля в пробке в продольную степень свободы переходит лишь часть поперечной энергии, получаемой резонансными частицами при ЭЦ-нагреве $\Delta v_z \sim \sqrt{\delta \Delta E_{\perp}} / m$. Более того, формула (1.55) дает верхнюю оценку для η . Дело в том, что в слабостолкновительной плазме существует более сильный механизм потери асимметрии в результате следующих отражений резонансных частиц от локальной пробки. Этот канал потерь становится доминирующим при выполнении неравенства $N \sqrt{2\Delta E_{\perp}} / m / (2\pi R_0) > v_{ei} (\Delta E_{\perp}) \delta^{-1}$ приводит к уменьшению η . В общем случае выражение для η имеет вид

$$\eta \approx \frac{e v_z}{\Delta E_{\perp} \delta [v_{ei} (\Delta E_{\perp}) \delta^{-1} + v_z N / (2\pi R_0)]}. \quad (1.56)$$

При выводе (1.56) учитывался эффект, аналогичный эффекту увеличения бутстреп-тока за счет «индуцированного» продольного тока пролетных частиц. Именно при выполнении неравенства $v_{ei} (\Delta E_{\perp}) < v_z N / (2\pi R_0)$ часть запертых частиц за время до следующего отражения от пробки успевает в результате столкновений перейти в разряд пролетных частиц. Потеря продольного импульса этими частицами происходит уже за время, в δ^{-1} раз больше времени столкновительного выхода из области локального захвата, так что и переносимый ими ток в δ^{-1} раз больше тока запертых частиц.

Из (1.56) следует, что зависимость η_2 от энергии резонансных частиц имеет максимум $(\Delta E_{\perp} / T_e)^2 \sim v_{ei} \cdot 2\pi R_0 / (\delta^{3/2} N v_{Te})$. При термоядерных параметрах этот максимум достигается при $\Delta E_{\perp} \ll T_e$, так что описанный выше метод вряд ли сможет найти применение в реакторе-токамаке.

И, наконец, с ЭЦ-волнами связана еще одна интересная идея генерации стационарного тока, выдвинутая в [42, 43]. Правда, этот метод не относится к «бессиловым», так как для его реализации существенно наличие у ЭЦ-волн продольного импульса. Од-

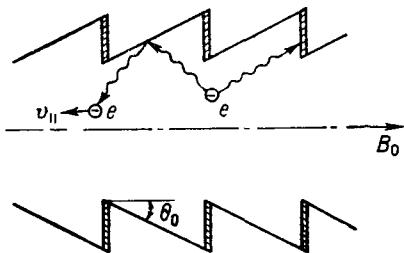


Рис. 1.6. Схема генерации тока за счет асимметричного отражения от стенок синхротронного излучения

излучение изотропно, поэтому, казалось бы, выход его из плазмы не должен сопровождаться изменением тороидального компонента импульса электронов. Ситуация, однако, меняется при учете отражения излучения от стенок камеры токамака. Предположим, что стенка камеры обладает анизотропным коэффициентом отражения (простейшая схема, реализующая такую ситуацию, приведена на рис. 1.6). Тогда из плазмы будет выходить часть излучения с неравным нулю тороидальным импульсом. Передаваемый при этом электронам импульс отдачи будет приводить к их ускорению в тороидальном направлении, т.е. к созданию продольного тока. Количество ток можно оценить следующим образом. Предположим, что анизотропная поверхность стенок поглощает синхротронное излучение, распространяющееся по отношению к направлению магнитного поля в диапазоне углов $0 \leq \theta \leq \theta_0$. В этом случае на единицу объема плазмы действует сила

$$F = (\theta/c) W / \tau_s, \quad (1.57)$$

где W — плотность энергии синхротронного излучения; τ_s — время ухода излучения, попадающего на поглощающую стенку.

Значение W можно оценить из уравнения баланса

$$dW/dt = n_e T_e / \tau_c - W(1-R) / \tau_s. \quad (1.58)$$

Здесь τ_c — время охлаждения электронов за счет синхротронного излучения; R — средний коэффициент отражения излучения от стенок камеры. С учетом (1.58) следует, что $F = (\theta_0/c) n_e T_e / [\tau_c(1-R)]$. Зная F , нетрудно оценить плотность тока по формуле $j = eF / (m v_{ei})$:

$$j = \frac{en_e T_e}{m v_{ei} c \tau_c} \frac{\theta_0}{1-R}. \quad (1.59)$$

Поскольку значение $1-R$ не может быть меньше θ_0 , то максимум (1.59) достигается при $\theta_0 = 1-R$. Выражение для протекающего по плазме тока в этом случае имеет вид

$$I = -e \frac{\pi a^2}{mc} \frac{T_e \tau_{ei}}{mc \tau_c}. \quad (1.60)$$

нако поскольку речь идет не о внесении импульса с помощью внешнего источника, а об излучении ЭЦ-волн термоядерными электронами, описание этого метода помещено в настоящем параграфе.

Известно (см., например, [44]), что синхротронное излучение является одним из основных каналов потерь энергии в высокотемпературной плазме токамака. В нерелятивистском пределе такое

Используя известное выражение для τ_e [44], можно получить окончательно [43]:

$$I = \alpha \cdot 9,4 \cdot 10^{-7} a^{3/2} \left(\frac{T_e}{mc^2} \right)^{5/2} \frac{T_e^{3/2} B_0^{5/2} (1-R)^{1/2}}{Z_i n_e^{1/2}}, \quad (1.61)$$

где I — ток, А; a — малый радиус, см; T_e — электронная температура, эВ; B_0 — магнитная индукция тороидального поля, Тл; n_e — плотность, см⁻³. Коэффициент α учитывает роль надтепловых электронов. Проведенный в [42] анализ показывает, что оптимизация (1.61) приводит к $\alpha = 5 \div 10$. Числовая оценка показывает, что в плазме с параметрами $n_e = 10^{14}$ см⁻³, $B_0 = 10$ Тл, $a = 150$ см, $R = 0,9$ ток $I = 15$ мА достигается при $T_e = 50$ кэВ. Следует подчеркнуть, что согласно (1.61) ток $I \sim \bar{T}^4$, так что практическое использование синхротронного излучения для создания стационарного тока возможно лишь в реакторе-токамаке с очень высокой температурой

1.3.2. Инжекция таблеток. Идея использования инъекции вещества для генерации тока была впервые высказана в [7]. Фактически там были высказаны две принципиально разные идеи. Одна из них уже была кратко описана выше и заключается в одновременном использовании локальной инъекции вещества и энергии, причем области их локализации должны быть сдвинуты друг относительно друга в направлении большего обхода на $\pi/2$. Из полученной формулы для плотности тока (1.5) следует, что ток, в частности, пропорционален амплитуде возмущения температуры плазмы \bar{T} . Нетрудно оценить зависимость \bar{T} от мощности источника p . В высокотемпературной плазме возмущение \bar{T} рассасывается вдоль силовых линий магнитного поля с тепловой скоростью электронов, откуда следует, что

$$n_e \bar{T} \approx R_0 p / v_{Te}. \quad (1.62)$$

Из (1.62) и (1.5) получаем формулу для эффективности генерации тока:

$$\tau_r \sim (e\bar{n}/n_e) / (m v_{ei} v_{Te}). \quad (1.63)$$

Видно, что эффективность генерации тока таким методом очень мала даже при $\bar{n}/n_e \leq 1$.

Гораздо интереснее, на первый взгляд, кажется вторая идея из [7], как будто не использующая для создания тока внешних источников энергии. Предположим, что в плазму токамака последовательно инжектируются таблетки топлива так, что каждая следующая таблетка смещена относительно предыдущей вдоль большого обхода на расстояние Δz и во времени на Δt (рис. 1.7). Фактически отношение $\Delta z/\Delta t$ есть фазовая скорость распространения таблеток вдоль оси z : $v_\phi = \Delta z/\Delta t$. Соответствующим выбором параметров Δz и Δt скорость v_ϕ может быть подобрана так,

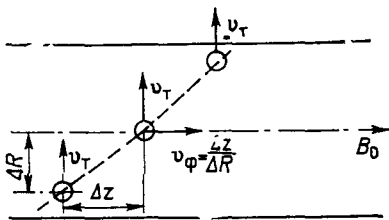


Рис. 1.7. Схема генерации тока последовательной инжекцией крупинок

ную сторону оси z , для которых $v_z = -v_{Te}$. Нетрудно оценить создаваемый при этом продольный ток. Введем эффективную частоту столкновений пучка электронов с $v_z < 0$ с таблетками v_T (значение v_T зависит от размеров таблетки, ее состава, и конкретизировать ее не будем). Тогда из уравнения баланса импульса электронных пучков

$$dj_{\parallel}/dt = -v_{ei}j_{\parallel} + v_T en_e v_{Te}/2 \text{ следует:} \\ j_{\parallel} = v_T en_e v_{Te}/(2v_{ei}) \quad (1.64)$$

(плотность тока, конечно, не может превысить значение $j_{\parallel} \leq en_e v_{Te}/2$). Оценим теперь, какую энергию теряет плазма в результате взаимодействия с таблетками. Даже если предположить, что при столкновении с таблеткой теряют свою энергию только ионы, получим:

$$p = -\frac{3}{2} \frac{dn_i T_i}{dt} = v_T n_i T_i. \quad (1.65)$$

При выводе (1.65) считалось, что $v_{\phi} \approx v_{Te}$. При выполнении неравенства $v_{\phi} < v_{Te}$ нужно перенормировать $v_T \rightarrow v_T v_{\phi}/v_{Te}$ [однако при этом и плотность тока, определяемая (1.64), уменьшится соответственно в v_{ϕ}/v_{Te} раз]. Из (1.64), (1.65) следует формула для «фактической» эффективности генерации тока таблетками:

$$\eta \sim e/(mv_{ei}v_{Te}), \quad (1.66)$$

т. е. и такой способ имеет весьма малую эффективность. Следует, правда, отметить, что последовательная инжекция таблеток все же обладает рядом привлекательных особенностей. Во-первых, она не требует мощных источников энергии, а сама приводит к охлаждению плазмы (что может оказаться полезным, например, для подавления перегретой неустойчивости горения). Во-вторых, такой метод генерации не требует пучков мегаэлектрон-вольтного диапазона энергий, поскольку реальная скорость таблеток может быть сделана много меньше эффективной фазовой скорости v_{ϕ} .

1.3.3. Бутстреп-ток. Физически механизм генерации тока связан с паличием в токамаках группы запертых частиц и качественно может быть пояснен следующим образом [3, 4]. Наличие тороидальности приводит к вертикальному дрейфу электронов и ионов

с характерной скоростью $v_D \sim cT/(eBR_0)$. Из-за такого дрейфа частицы при движении вдоль магнитной силовой линии отклоняются от нее на характерное расстояние $\Delta r \sim v_{Dq}R_0/v_{\parallel}$.

Наибольшее отклонение испытывают запертые частицы, для которых продольная скорость минимальна: $v_{\parallel} \approx v_{Te} \sqrt{\epsilon}$. При этом запертые электроны находятся на наружной стороне банана, когда они движутся по оси B против направления тока, и на внутренней стороне — при движении по оси тока. При наличии радиального градиента электронной функции распределения такое смещение орбит приводит к появлению несимметрии функции распределения электронов по продольной скорости, т. е. к генерации тока вдоль оси z . Характерная токовая скорость запертых электронов $u_{ze} = [cT_e/(eB_0n_e)] \partial n_e/\partial r$ и полностью аналогична диаманитной скорости электронов в неоднородном плазменном слое с заменой B_0 на B_{θ} .

Как известно [9], ток банановых частиц из-за наличия силы греня индуцирует продольный ток пролетных электронов. Вследствие диффузионного характера интеграла столкновений несимметрия функции распределения по v_{\parallel} распространяется на все пролетные частицы, так что полный ток в $\epsilon^{-1/2}$ раз больше тока банановых электронов. Этот ток (называемый бутстреп-током) можно оценить следующим образом. Характерная несимметрия электронной функции распределения f_e по продольной скорости в банановой области равна $\Delta f_e \approx \frac{\partial f_e}{\partial r} \Delta r \sim \frac{cT_e q}{eB_0 v_{Te} \sqrt{\epsilon}} j_M \frac{\partial n_e}{n_e \partial r}$. Поскольку столкновения «растягивают» эту несимметрию вплоть до $|v_{\parallel}| \sim v_{Te}$, то характерное значение бутстреп-тока ($j_B \approx e v_{Te}^2 \Delta f_e$):

$$j_B \approx \frac{c \sqrt{\epsilon}}{B_{\theta}} \frac{\partial n_e T_e}{\partial r}, \quad (1.67)$$

откуда с использованием уравнения Максвелла

$$B_{\theta}^2 \approx \frac{8\pi}{r^2} \int_0^r r'^2 dr' \sqrt{\frac{r'}{R_0}} \frac{\partial n_e T_e}{\partial r'}, \quad (1.68)$$

[формула (1.68) получена в предположении отсутствия альтернативных бутстреп-эффектов источников тока]. Прежде всего из (1.68) следует, что бутстреп-ток создает полоидальное магнитное поле, достаточное для удержания плазмы лишь в пределе достаточно большого ее давления:

$$\langle \beta_{\theta} \rangle \gg \epsilon^{-1/2} \alpha, \quad (1.69)$$

где $\langle \beta_{\theta} \rangle$ — среднее по сечению значение β_{θ} , $\alpha < 1$.

Условие (1.69), вообще говоря, удовлетворяет условию равновесия плазмы в токамаке $\beta_{\theta} < \epsilon^{-1}$, так что принципиально бутстреп-

ток способен обеспечить равновесие плазменного шнура. Однако, как уже отмечалось, бутстреп-эффект (без учета тока α -частиц) приводит не к генерации полоидального поля, а лишь к его усилению. Для того чтобы обосновать это утверждение, помимо уравнения (1.68) понадобится уравнение диффузии плазмы, определяющее входящий в (1.68) градиент плотности плазмы (для простоты положим $dT_e/dr=0$). Предположим сначала, что диффузия плазмы определяется только неоклассическими эффектами диссипации диамагнитного тока вследствие электрон-ионных столкновений. Тогда в банановом режиме уравнение диффузии плазмы имеет вид [9]:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{v_{ei} v_{Te}^2 m^2 c^2}{e^2 B_0^2} \sqrt{\epsilon} \frac{\partial n_e}{\partial r} + S(r). \quad (1.70)$$

Здесь $S(r)$ — источник частиц. В стационарном состоянии (при $\partial n_e/\partial t=0$) из этого уравнения следует:

$$\partial n_e/\partial r = e^2 B_0^2 \int_0^r S(r') r' dr' / (r v_{ei} v_{Te}^2 m^2 c^2 \sqrt{\epsilon}). \quad (1.71)$$

Подставляя (1.71) в (1.67), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r} r B_0 \simeq \frac{2\pi e^2 B_0 r}{v_{ei} m c^2} \frac{1}{r} \int_0^r S(r') r' dr'. \quad (1.72)$$

Физически разумное решение (1.72) возможно только при использовании δ -функционального источника частиц $S(r) \sim \delta(r)$. В противном случае (а только такие случаи и можно реализовать на практике) стационарным решением (1.72) является лишь $B_0 \equiv \equiv 0$. Физическая природа такой «неустойчивости» заключается в следующем. Бутстреп-ток есть следствие неоднородности плазмы поперек магнитного поля: $j_B \sim (1/B_0) \partial n_e/\partial r$. Если бы в плазме отсутствовали диссипативные процессы, эта неоднородность (а с ней и бутстреп-ток) была бы стационарной. Наличие же электрон-ионных столкновений приводит к диссипации диамагнитного тока и вызывает диффузию плазмы поперек магнитного поля. Даже в отсутствие аномальных процессов переноса неоклассическая диффузия приводит к уплощению профиля плотности, и для поддержания конечной неоднородности в плазму нужно вводить источник частиц. Поскольку коэффициент неоклассической диффузии $D_{neo} \sim \sim B_0^{-2}$, то уплощение профиля плотности, вызывающее уменьшение бутстреп-тока, приводит к последующему увеличению коэффициента диффузии и еще большему уплощению плотности плазмы. Быстрее всего этот эффект проявляется в центре плазмы, где удерживающее магнитное поле минимально.

Итак, на простейшей модели показано, что бутстреп-ток сам по себе не может привести к стационарному удержанию плазмы. Проанализируем возможность создания стационарного токамака

с помощью комбинации бутстреп-тока и создаваемого каким-либо другим методом «затравочного» тока в центре плазменного шнура [45]. По-видимому, для создания такого локального тока в центре плазменного шнура оптимальным является метод, использующий ЭЦ-волны. Мы, однако, не будем здесь конкретизировать этот метод, а будем считать, что с помощью внешнего источника в центре плазмы (при $0 \leq r \leq r_0 \ll a$) возбужден продольный ток с плотностью j_0 . При $r > r_0$ внешний источник отсутствует и усиление поля j_0 происходит только за счет бутстреп-тока. Предположим сначала, что диффузия плазмы определяется только неоклассическими процессами. Тогда распределение магнитной индукции поля B_θ и плотности плазмы по радиусу может быть найдено непосредственно из уравнений (1.68) и (1.72):

$$B_\theta(r \geq r_0) = \frac{2\pi}{c} \frac{j_0 r_0^2}{r} \exp \left\{ \int_r^{r_0} \frac{4\pi e^2}{m v_{ei} c^2} \frac{dr'}{r'} \int_0^{r'} S(r'') r'' dr'' \right\}; \quad (1.73)$$

$$(r B_\theta)^2 = \left(\frac{2\pi}{c} j_0 r_0^2 \right)^2 - 40\pi \int_{r_0}^r r'^2 \sqrt{\frac{r'}{R_0}} T_e \frac{dn_e}{dr'} dr', \quad (1.74)$$

Из (1.73) в предположении $S = \text{const}$ следует, что полоидальное магнитное поле экспоненциально растет по радиусу. Рассмотрим наиболее интересный случай малого затравочного тока, когда $B_\theta(r=r_0) \ll B_\theta(a)$. Из этого неравенства и условия экспоненциальности роста B_θ сразу следует, что бутстреп-ток, а с ним и полоидальное магнитное поле в основном локализованы на периферии плазменного шнура, что вряд ли приемлемо для реактора.

Рассмотрим теперь другой предельный случай (по-видимому, более близкий к реальному эксперименту), когда процессы переноса в токамаке, в том числе диффузия плазмы поперек магнитного поля, аномально велики. Интересно посмотреть, как при этом меняется распределение бутстреп-тока. Ясно, что уравнение (1.68) остается прежним, а уравнение (1.70) должно быть изменено [46]:

$$\frac{dn_e}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left(D_{\text{ан}} + \frac{v_{ei} v_{Te}^2 m^2 c^2}{e^2 B_\theta^2} \sqrt{\varepsilon} \right) \frac{dn_e}{dr} + S(r), \quad (1.75)$$

где $D_{\text{ан}}$ — коэффициент аномальной диффузии.

Из эксперимента известно, что $D_{\text{ан}}$ везде, кроме узкой области вблизи $r \rightarrow 0$, много больше неоклассического коэффициента диффузии (если, конечно, поле B_θ не слишком мало). Если считать выполненным неравенство $D_{\text{ан}} \gg v_{ei} v_{Te}^2 m^2 c^2 \sqrt{\varepsilon} / (e^2 B_\theta^2)$ (напомним, что при $r \leq r_0$, где B_θ мало, ток создается сторонним источником), то из (1.75) сразу следует, что профиль плотности перестает зависеть от поля B_θ . Это позволяет разделить уравнения для плотности и магнитного поля и, как следствие, получить разумное распределение поля B_θ по радиусу.

В заключение отметим, что среди теоретиков и экспериментаторов пока нет единого мнения о соответствии наблюдаемого бутстреп-тока его неоклассическому значению. Сомнения теоретиков связаны с результатами [47], где было обращено внимание на то, что значение этого тока, определяемое формулой (1.67), контролируется очень узкой переходной областью фазового пространства на границе между пролетными и запертыми частицами. Размытие этой области за счет даже небольших аномальных процессов должно привести к уменьшению бутстреп-тока в $1/\epsilon$ раз по сравнению со значением, даваемым формулой (1.67). Если выводы [47] справедливы, то в соответствии с (1.68) бутстреп-ток не сможет обеспечить равновесие плазмы даже при $\beta_\theta \simeq R_0/a$.

Экспериментальное наблюдение бутстреп-тока затруднено присутствием в плазме омического тока, который в условиях $\beta_\theta \ll R_0/a$ даже по неоклассической теории значительно превышает бутстреп-ток. Обнадешивающие результаты получены только в недавних экспериментах на токамаке TFTR [48], где с помощью мощной нейтральной инжекции удалось получить плазму с $\beta_\theta > 1$. При этом напряжение на обходе плазмы становилось отрицательным, что можно объяснить только с помощью бутстреп-тока.

2. ПОДДЕРЖАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТОКА В ТОКАМАКАХ

2.1. Реактор-токамак с самоподдерживающимся током (бутстреп-токамак)

2.1.1. **Нужен ли затравочный ток?** Согласно неоклассической теории процессов переноса плазмы [9, 61, 62], диффузия частиц и тепла поперек магнитного поля сопровождается генерацией продольного тока. Рассмотрим возможность использования этого эффекта для создания стационарного токамака.

Будем исходить из следующего уравнения для тока $I(r)$, протекающего внутри магнитной поверхности радиусом r :

$$dI(r)/dr = 2\pi r j(r), \quad (2.1)$$

где $j(r)$ — плотность тока. Предположим, что плазма находится в банановом режиме и не содержит примесей. Эти предположения, естественные для термоядерного реактора, позволяют записать простое соотношение, которое связывает бутстреп-ток с неоклассическими потоками частиц и тепла поперек магнитного поля [61, 62]:

$$j = \sigma_s \frac{B_p}{n_e c} \left(\Gamma + \frac{1}{3} \frac{q_e}{T_e} \right), \quad (2.2)$$

где Γ — поток частиц; q_e — электронный тепловой поток; $\sigma_s = = 2n_e e^2 / (m_e \nu_{ei})$ — спитцеровская проводимость плазмы вдоль маг-

нитного поля; ν_{ei} — частота электрон-ионных столкновений; n_e и T_e — плотность и температура электронов. Подставив (2.2) в (2.1) и приняв во внимание, что $B_p = 2I/(rc)$, получим:

$$I(r) = I(r_0) \exp \left\{ \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_S}{n_e} \left(\Gamma + \frac{1}{3} \frac{q_e}{T_e} \right) dr' \right\}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что система уравнений (2.1), (2.2) имеет только тривиальное решение, поскольку $I(r_0=0)=0$. Если отказаться от предположения об отсутствии примесей в плазме, то придем к отличному от (2.3) выражению, но различие будет не принципиальным. Поэтому можем заключить, что в рамках рассматриваемой модели стационарный токамак невозможен; для поддержания тока в плазме требуется применение специальных мер (осуществление инъекции нейтральных атомов или ввод ВЧ-мощности в плазму), с помощью которых поддерживался бы ток в приосевой области $r \leq r_0$. Иными словами, нужен создаваемый внешними устройствами затравочный ток $I(r_0)$, благодаря которому неоклассические процессы переноса могли бы поддерживать стационарный ток в области $r > r_0$ в соответствии с выражением (2.3).

Этот вывод был сделан в пионерских работах [3, 4]. Впоследствии стационарное поддержание тока в токамаках с затравочным током изучалось в работах [45, 63] и кратко рассмотрено в гл. 1 настоящего обзора.

Но действительно ли принципиально невозможен стационарный токамак с током, который поддерживается только за счет неоклассических процессов переноса? Этот вопрос естественно возникает, если учесть, что вывод о необходимости тока $I(r_0)$ сделан на основе уравнений, которые, строго говоря, неприменимы в приосевой области плазмы. Последнее связано с тем, что при малых r параметр столкновительности неоклассической теории большой: $\nu_* \gg 1$, $\nu_* = \sqrt{2} q R_0 \nu_{ei} / (v_{Te} \epsilon^{3/2})$, где q — запас устойчивости токамака; R_0 — большой радиус тора; $\epsilon = r/R_0$; $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$. Поэтому в приосевой области вместо выражения (2.2) следовало бы использовать выражение для плотности тока j плазмы в режиме «плато» или даже в гидродинамическом режиме [если $q(0) \gg 1$]. Но анализ показывает, что и тогда неоклассическая теория не позволяет получить самосогласованную картину. Так, в режиме «плато» при $1 \ll \nu_* \ll \epsilon^{-3/2}$ радиальная зависимость тока вблизи оси дается выражением $j(r) = r(a_1 n' + \beta_1 T')$, где a_1 и β_1 — коэффициенты; $n' \equiv \partial n / \partial r$; $T' \equiv \partial T / \partial r$. Требование отличия от нуля тока на оси приводит к невыполнимому условию $n' \sim r^{-1}$. В гидродинамическом режиме $j = B_p(a_2 n' + \beta_2 T')$, где a_2 и β_2 — коэффициенты. Отсюда если $j(0) \neq 0$, то с учетом соотношения $B_p \sim rj(0)$ снова приходим к условию $n' \sim r^{-1}$. Наконец, в экзотическом случае $j(0) = 0$ с учетом уравнения Ампера приходим к тривиальному решению $B_p(r) = 0$.

Иной является ситуация в приосевой области для высокоэнергетических частиц. Очевидно, что если энергия частиц достаточно велика, то для них будет иметь место банановый режим даже при $r \rightarrow 0$. Но к ним нельзя применить подход и тем более результаты известной неоклассической теории [9, 61], поскольку она построена в предположении, что $\Delta r/r \ll 1$ (Δr — радиальное отклонение частицы относительно магнитной поверхности при движении по орбите), которое дает границу применимости теории, исключаящую приосевую область: $r \gg s^{2/3} R_0$, где $s = 2qv / (R_0 \omega_B)$. В то же время можно ожидать, что на магнитной оси баланс продольных скоростей высокоэнергетических частиц, приходящих на ось из областей плазмы с различными плотностью и температурой, не нулевой. Если это так, тогда при наличии в плазме, например, высокоэнергетических α -частиц (продуктов DT-реакции) выражение для тока (2.2) следует дополнить слагаемым, которое остается отличным от нуля при $r \rightarrow 0$. Тогда уравнение (2.1) будет иметь нетривиальное решение.

Таким образом, приходим к необходимости тщательного изучения процессов переноса в приосевой области плазмы.

2.1.2. Орбиты приосевых частиц. Прежде всего, изучим орбиты частиц, проходящих через ось, и получим условия бананового режима при малых r .

Считая токамак аксиально-симметричным, введем координаты ψ, θ, ζ , где $\psi = -R^2 \nabla \zeta \cdot \mathbf{A}$ — функция магнитных поверхностей; $R = |\nabla \zeta|^{-1}$ — расстояние от главной оси тора; \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля; θ и ζ — полоидальная и тороидальная угловые координаты [62]. Тогда с помощью дрейфовых интегралов движения частицы

$$v = \text{const}; \quad \lambda = \frac{v_{\perp}^2}{v^2} \frac{B_s}{B} = \text{const}; \quad J = \psi - \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} R B_{\tau} = \text{const}, \quad (2.4)$$

где v_{\perp} и v_{\parallel} — скорость частицы поперек и вдоль магнитного поля \mathbf{B} ; B_s — поле на магнитной оси; B_{τ} — модуль тороидального магнитного поля $\mathbf{B}_{\tau} = R B_{\tau} \nabla \zeta$, нетрудно получить уравнение орбит частиц:

$$\left(\frac{e}{mcvR_0} \right)^2 (\psi - \psi_0)^2 + \frac{2e\chi_0 h_0}{ctvR_0} (\psi - \psi_0) + \chi_0^2 \left(h_0^2 - h_0^2 \frac{B}{B_0} \right) + h^2 \left(\frac{B}{B_0} - 1 \right) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь $h = B_{\tau} R / (B R_0)$, $\chi = v_{\parallel} / v$, индекс «0» относится к точке фазового пространства (χ_0, v_0) . Выразим ψ через r — также функцию магнитных поверхностей, но имеющую размерность длины, взяв полоидальное магнитное поле в виде $\mathbf{B}_p = \nabla \zeta \times \nabla \psi$, с помощью уравнения $|\nabla \psi| = R B_p$ и выражения для коэффициента запаса устойчивости токамака $q = (R B_{\tau} / 2\pi) \oint dl / (R^2 B_p)$:

$$\psi = (e^2 / s) e j (mcvR_0), \quad (2.6)$$

где

$$s = \frac{2v}{\omega_B R_0} \left[\frac{2}{r^2} \int_0^r \frac{dr'}{q} \oint \frac{dl}{2\pi |\nabla r'|} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

Чтобы вычислить интеграл в (2.7), требуется конкретизация геометрии магнитного поля. Рассмотрим токамак с эллиптическим сечением магнитных поверхностей, определив r и θ посредством соотношений:

$$R = R_0 - \Delta(r) + r \cos \theta; \quad z = \delta r \sin \theta, \quad (2.8)$$

где R, z — обычные цилиндрические координаты; ось z направлена вдоль главной оси тора; $\delta = b/a$ — отношение вертикальной полуоси эллипса к горизонтальной; $\Delta(r)$ — величина, характеризующая смещение магнитных поверхностей. Эти соотношения позволяют получить выражения для компонентов и определителя метрического тензора (считаем $\Delta/r \ll \varepsilon$):

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta - 2(\partial\Delta/\partial r) \cos \theta; & g_{13} &= g_{23} = 0; \\ g_{12} &= r \sin \theta \cos \theta \left(\delta^2 - 1 + \frac{\partial\Delta/\partial r}{\cos \theta} \right); & g_{22} &= r^2 (\sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta); \\ g_{33} &= R_0^2 (1 - 2\varepsilon \cos \theta); \\ g &= R_0^2 r^2 \delta^2 [1 + 2(\varepsilon - \partial\Delta/\partial r) \cos \theta], \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

с помощью которых найдем, что при $q(r)$, постоянном на ширине орбит частиц, $s(r) = \text{const}$ и определяется выражением (полагаем $\Delta/r \ll \varepsilon$):

$$s = 2q_0 v / (\omega_{Bs} R_0 \delta), \quad (2.10)$$

где $\omega_{Bs} = eB_s / (mc)$; $q_0 \equiv q(0) = cB_s (\delta + \delta^{-1}) / (4\pi R_0 j_0)$. В частности, при однородном распределении тока

$$s = \frac{mc^2 v}{eA^2 I} \frac{\delta + \delta^{-1}}{2}, \quad (2.10a)$$

где I — ток в плазме; A — аспектное отношение тора.

Определив s , запишем уравнение орбит частиц, проходящих через магнитную ось, используя выражения (2.5), (2.6):

$$F(\varepsilon, \theta, \chi_0) \equiv \varepsilon [\varepsilon^3 + 2s\chi_0\varepsilon - s^2 \cos^2 \theta (1 + \varepsilon \cos \theta + \chi_0^2)] = 0, \quad (2.11)$$

где χ_0 — питч-угол частицы в момент прохождения ею магнитной оси. Уравнение (2.11) использовалось для изучения орбит приосевых частиц в [11, 64—66], наиболее подробный анализ этого уравнения проведен в [65]. Как следует из [64—66], характеристики орбит, определяемых (2.11), весьма специфичны. Так, предельное значение питч-угла запертых частиц (χ_*), при котором радиальный

размах орбит является наибольшим, зависит от энергии: $\chi_* = -3s^{1/3}/2^{5/3}$, область существования запертых частиц в пространстве питч-углов асимметрична: $\chi_* \leq \chi_0 < 0$; частицы, обладающие на оси питч-углом χ_* , достигают магнитной поверхности $r_* = (2s)^{2/3}R$. Приведенное значение r_* найдено из уравнения $F(\epsilon_*, 0, \chi_*) = 0$, где χ_* определяется системой уравнений $\partial F(\epsilon, \pi, \chi_*)/\partial \epsilon = 0$ [следствие требования $\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \chi_0} \right|_{\theta=\pi, \chi_0=\chi_*} = \infty$ и

$F(\epsilon, \pi, \chi_*) = 0$]. Условием существования запертых частиц является разрешимость системы уравнений $\partial F(\epsilon, \theta, \chi_0)/\partial \epsilon = 0$ (следствие условия $\partial \theta/\partial \epsilon = 0$) и $F(\epsilon, \theta, \chi_0) = 0$.

Характеристики орбит, у которых $r_{\min} \neq 0$, но достаточно мало ($r_{\min} < s^{2/3}R$), близки к характеристикам рассмотренных частиц. Это иллюстрирует рис. 2.1, где приведена зависимость максимального смещения частиц от питч-угла при $r_{\min} = 0$ и $r_{\min}/R = 0,03$.

Нетрудно видеть, что, несмотря на специфику приосевых орбит, найденные значения для Δr и χ_* по порядку могут быть получены из соответствующих выражений для удаленных от оси орбит путем формальной замены $\epsilon \rightarrow s^{2/3}$. То же можно сказать о баунс-периоде. Это становится понятным, если учесть, что условие $\Delta \epsilon \leq s^{2/3}$ служит границей применимости теории орбит с $\Delta r/r \ll 1$, и что изменение магнитного поля на ширине приосевых орбит есть $\Delta B/B \sim s^{2/3}$.

Теперь можно записать условие существования бананового режима в приосевой области:

$$\omega_B v_{\text{col}} R_0^2 / v^2 \ll 1, \quad (2.12)$$

где v_{col} — характерная частота столкновений. Условие (2.12) является весьма жестким для плазмы (в особенности для электронов), но легко выполнимо для высокоэнергетических ионов, в частности для α -частиц — продуктов термоядерной реакции. Разумеется, говоря о банановом режиме, мы предполагаем, что запертые частицы удерживаются магнитным полем токамака. Условием, которое обеспечивает выполнение этого предположения, является $r_* < a$ при $q(r) = \text{const}$, что для частиц с энергией $\mathcal{E} = 3,5$ МэВ дает [65—67]:

$$I > \frac{5,4}{\sqrt{A}} \frac{\delta + \delta^{-1}}{2}, \quad (2.13)$$

где I — ток в плазме, МА.

2.1.3. Неоклассическая теория процессов переноса α -частиц в приосевой области. В термоядерной плазме присутствуют α -частицы с широким спектром энергий (см., например, обзор [67]). Мы ограничимся изучением переноса частиц с энергиями в диапазоне $\mathcal{E}_c \ll \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_\alpha$, где $\mathcal{E}_c \sim (m_\alpha/m_e)^{1/3} T_e$, m_α и m_e — масса α -частицы и электрона. Условие $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$ вовлекает в рассмотрение частицы с достаточно большими радиальными смещениями, тогда как условие $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_\alpha$ исключает из рассмотрения область энергий, где

функция распределения α -частиц экспоненциально мала. Эти условия выделяют наиболее существенные для токопереноса частицы и в то же время значительно упрощают анализ. Благодаря им, во-первых, уравнение для функции распределения можно считать стационарным и, во-вторых, в операторе кулоновских столкновений достаточно удержать лишь слагаемое, связанное с торможением α -частиц электронами.

Принимая во внимание сказанное, будем исходить из дрейфового кинетического уравнения α -частиц в виде

$$(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_d) \cdot \nabla f_{\alpha} = C_{\alpha e} + S_v. \quad (2.14)$$

Здесь $f_{\alpha} = f_{\alpha}(\psi, \theta, v, \lambda, \sigma)$ — функция распределения α -частиц; $\sigma = \text{sgn}(v_{\parallel}/v)$; v_d — скорость тороидального дрейфа частиц; $C_{\alpha e}$ — столкновительный член; S_v — слагаемое, которое описывает рождение α -частиц вследствие термоядерной реакции. Названные величины определяются следующими выражениями:

$$v_d = -v_{\parallel} \frac{B}{B} \times \nabla \left(\frac{v_{\parallel}}{\omega_B} \right); \quad C_{\alpha e} = \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f; \\ S_v = \frac{n^2 \langle \sigma v \rangle}{16\pi v_{\alpha}^2} \delta(v - v_{\alpha}), \quad (2.15)$$

где $n^2 \langle \sigma v \rangle / 4$ — скорость термоядерной реакции; $v_{\alpha} = \sqrt{2\mathcal{E}_{\alpha}/m_{\alpha}} = 1,3 \cdot 10^9$ см \cdot с $^{-1}$; τ_s — характерное время торможения α -частиц электронами, равнос

$$\tau_s = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \frac{m_{\alpha} T^{3/2}}{e^2 e_{\alpha}^2 \Lambda n_e \sqrt{m_e}}; \quad (2.16)$$

Λ — кулоновский логарифм.

В интересующей нас приосевой области движение частиц носит существенно неодномерный характер в плоскости ψ, θ , поскольку дрейф оказывает не меньшее воздействие на вид орбит, чем перемещение частиц вдоль поля. Поэтому неприменима известная методика нахождения решения кинетического уравнения, основанная на использовании малости отношения v_d/v_{\parallel} .

Чтобы оперировать не с двумя координатами (ψ, θ), а лишь с одной из них (ψ), воспользуемся сохранением проекции обобщенного импульса частицы на направление магнитной оси тора. Для этого введем переменные $\psi, J, v, \lambda, \sigma, \sigma_{\theta}$, где $\sigma_{\theta} = -\mathbf{v}_d \times$

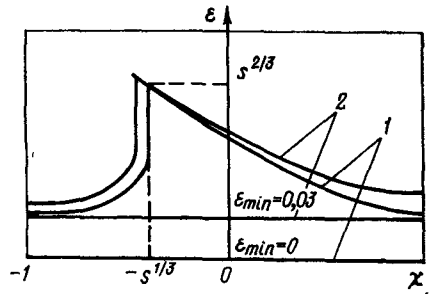


Рис. 2.1. Зависимость максимального радиального отклонения орбит приосевых частиц от питч-угла ($\chi = v_{\parallel}/v$) при $\epsilon_{\min} = 0$ (1) и $\epsilon_{\min} = 0,03$ (2); $s = 0,05$

для функции распределения

$\times \nabla \psi / |v_d \cdot \nabla \psi|$. В новых переменных уравнение (2.14) можно записать следующим образом:

$$\dot{\psi} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \psi} = \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 j_\alpha + \frac{J - \psi}{\tau_s} \frac{\partial f_\alpha}{\partial J} + S_v, \quad (2.17)$$

где $\dot{\psi} = v_d \cdot \nabla \psi$.

Принимая во внимание малость баунс-периода α -частиц (τ_b) по сравнению со временем их торможения электронами (τ_s), решение уравнения (2.17) будем искать в виде разложения

$$f_\alpha = f^0 + f^1 + \dots, \quad (2.18)$$

где верхний индекс означает порядок малости по параметру τ_b/τ_s .

Нетрудно видеть, что функция f^0 зависит только от интегралов движения J , v , λ , σ и определяется уравнением:

$$\langle \tau_s^{-1} \rangle \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f^0 + \left\langle \frac{J - \psi}{\tau_s} \right\rangle \frac{\partial f^0}{\partial J} + \langle S_v \rangle = 0. \quad (2.19)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по орбите, производимое путем интегрирования по радиальной координате:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\tau_b} \oint \frac{F d\psi}{\dot{\psi}}; \quad \tau_b = \oint \frac{d\psi}{\dot{\psi}}. \quad (2.20)$$

Полагая радиальные смещения частиц малыми по сравнению с радиусом плазмы a , решение уравнения (2.19) будем искать в виде разложения по степени $\psi = \psi/\psi_{\max} = r^2/a^2$:

$$f^0 = f_0^0 + f_1^0. \quad (2.21)$$

Здесь

$$f_0^0 = n_\alpha(0) \frac{\eta(v_\alpha - v)}{4\pi v^3}, \quad (2.22)$$

где $\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(y) dy$; $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака, а f_1^0 удовлет-

воряет уравнению

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f_1^0 + (J - \langle \psi \rangle) \frac{df_1^0}{dJ} = -n_\alpha'(0) \langle \psi \rangle \frac{\delta(v - v_\alpha)}{4\pi v_\alpha^2}, \quad (2.23)$$

где

$$n_\alpha'(0) \equiv \left. \frac{\partial n_\alpha}{\partial \psi} \right|_{\psi=0}. \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует зависимость f_1^0 от питч-угла при $v = v_\alpha$ и $v = v_\alpha/2$, представленная на рис. 2.2. Видно, что функция распределения наиболее быстро изменяется в окрестности точки χ_* , разделяющей области пролетных и запертых частиц. Очевидна асимметрия зависимости f_1^0 от χ , откуда следует наличие тока α -частиц на магнитной оси. Найдем этот ток [11]:

$$j_\alpha = -0,17 s^2 A^2 e_\alpha v_\alpha n_\alpha' \simeq 0,34 q_\alpha^2 \rho_\alpha^2 e_\alpha v_\alpha \partial^2 n_\alpha / \partial r^2, \quad (2.25)$$

где $\rho_\alpha = v_\alpha / \omega_{B\alpha}$.

Отметим, что выражение для тока (2.25) справедливо в области $\psi < S^{4/3} A^2$. При $\psi > S^{4/3} A^2$ ток найден в [68].

Для нахождения потока частиц поперек магнитного поля (Γ_α) требуется знание функции f^1 , которую представим в виде разложения типа (2.2). Оказывается, что $f_0^1 = 0$, поэтому Γ_α определяется функцией f^1 . Находим [11]:

$$\Gamma_\alpha = -k \frac{s^{7/3} A^3 a}{\tau_s} n_\alpha', \quad (2.26)$$

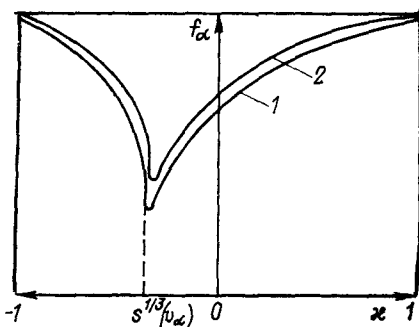


Рис. 2.2 Зависимость функции распределения приосевых α -частиц от pitch-угла при $v = v_\alpha$ (1) и $v = v_\alpha/2$ (2)

где k — положительный числовой коэффициент.

Теперь из (2.25), (2.26) получаем

$$j_\alpha \sim \sigma_\alpha \frac{s^{2/3} B}{c n_\alpha q} \Gamma_\alpha, \quad (2.27)$$

где $\sigma_\alpha = n_\alpha e_\alpha^2 \tau_s / m_\alpha$. Поскольку $s^{2/3} \sim \langle \epsilon \rangle$, выражение (2.27) можно представить в виде

$$j_\alpha \sim \frac{\sigma_\alpha \langle B_p \rangle}{c n_\alpha} \Gamma_\alpha. \quad (2.28)$$

Таким образом, мы пришли к соотношению типа (2.2), но в нем содержится не локальное значение полоидального магнитного поля, а его среднее по орбите значение.

2.1.4. Бутстреп-токамак с приосевым током α -частиц. Наличие в приосевой области реактора-токамака тока α -частиц позволяет вернуться к вопросу о стационарном токамаке с током, который поддерживается за счет неоклассических потоков частиц вдоль магнитного поля.

Прежде всего, важно выяснить направление тока, генерируемого α -частицами. Нетрудно видеть, что ток собственно α -частиц протекает в том же направлении, что и ток в плазме до начала термоядерного горения. Он возбуждает противоположно направленный ток увлечения электронов, который вблизи оси равен $-j_\alpha Z_\alpha / Z_{ef}^0$, где $Z_\alpha = 2$, Z_{ef}^0 — эффективный заряд плазмы при $r \rightarrow 0$ (подробнее об электронтном токе увлечения см. § 2.2, п. 2.2.2, 2.2.3). В результате α -частицы генерируют приосевый ток

$$j_{\alpha e} = j_\alpha (1 - 2/Z_{ef}^0), \quad (2.29)$$

где j_α дается выражением (2.25). Отсюда видно, что α -частицы могут быть использованы для поддержания тока, лишь если $Z_{ef}^0 > 2$, что в дальнейшем будет предполагаться выполненным. В то же время в области, удаленной от магнитной оси, эффектив-

ное зарядовое число Z_{ef} должно быть близким к единице: в противном случае радиационные потери плазмы могут оказаться слишком большими, а бутстреп-ток в ней — недостаточным. Возможно, для создания приемлемого радиального распределения $Z_{ef}(r)$ потребуется специальная инжекция тяжелых элементов.

С учетом (2.29) уравнение (2.1) запишем в виде

$$dI(r)/dr = 2\pi r (j_p + j_{\alpha e}). \quad (2.30)$$

Здесь j_p — плотность неоклассического тока в плазме, которая в режиме редких столкновений равна (полагаем $T_e = T_i = T$, $d \ln n_e / dr = d \ln n_i / dr$) [62]:

$$j_p = -k_1 \sqrt{\varepsilon} \frac{c}{B_j} nT \left\{ \left(1 + \frac{1}{Z_{ef}} \right) \frac{d \ln n}{dr} - \left(\frac{3}{2} + \frac{0,17}{Z_{ef}} - k_2 \right) \frac{d \ln T}{dr} \right\}, \quad (2.31)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты, зависящие от Z_{ef} , в частности, при $Z_{ef} = 1$ $k_1 = 2,3$, $k_2 = 1,82$; при $Z_{ef} = 2$ $k_1 = 1,87$, $k_2 = 2$; при $Z_{ef} = 4$ $k_1 = 1,65$, $k_2 = 2,14$. Ток $j_{\alpha e}$ определяется выражением (2.29) в области $r/a \leq As^{2/3}$. Вне этой области вид $j_{\alpha e}$ несуществен, так как при $r/a > As^{2/3}$ α -частицы вносят малый вклад в генерируемый ток. В частности, для токамаков с $I \sim 5 \div 7$ МА, $B \sim 5$ Тл, $R \sim 500$ см, $A \leq 5$ $As^{2/3} \sim 0,3$, а банановый режим для плазмы реализуется при $r/a \geq 0,1$. Поэтому области применимости выражений для токов (2.29), (2.31) перекрываются.

Наличие в правой части (2.30) слагаемого, связанного с α -частицами, обеспечивает существование нетривиального решения уравнения (2.30). Действительно, при $r \rightarrow 0$ $dI/dr = 2\pi r j_{\alpha e}$, откуда следует, что $I(r)$ является монотонно нарастающей функцией. Таким образом, благодаря α -частицам появляется принципиальная возможность осуществления в реакторах-токамаках режима с самоподдерживающимся током. Разумеется, для реализации этой возможности необходимо, чтобы бутстреп-ток в плазме был достаточно большим, обеспечивающим удержание плазмы.

Оценим генерируемый ток, преобразовав уравнение (2.30) к виду:

$$I^2(r) = 4\pi \int_0^r r' j_{\alpha e}(r') I_1(r') dr' - 2\pi k_1 c^2 \int_0^r \frac{dr' r'^{5/2}}{R^{1/2}} \times \\ \times nT \left[\left(1 + \frac{1}{Z_{ef}} \right) \frac{d \ln n}{dr'} - \left(\frac{3}{2} + \frac{0,17}{Z_{ef}} - k_2 \right) \frac{d \ln T}{dr'} \right]; \quad (2.32)$$

$$\beta_p \simeq -\frac{\sqrt{A}}{k_1} \left\{ \int_0^1 d\lambda \lambda^{5/2} \left[\frac{1 + Z_{ef}}{2Z_{ef}} \frac{n'T}{\langle nT \rangle_s} - \left(\frac{3}{4} + \frac{0,085}{Z_{ef}} - \frac{k_2}{2} \right) \frac{nT'}{\langle nT \rangle_s} \right] \right\}^{-1}, \quad (2.33)$$

где $\beta_p = 2\pi a^2 c^2 \langle p \rangle_s / I^2(a)$; $\langle p \rangle_s$ — среднее по сечению давление плазмы; $n' \equiv dn/dx$; $T' \equiv dT/dx$; $x = r/a$. Точное значение β_p зависит от радиальных распределений параметров плазмы. Последние, од-

нако, неизвестны и определяются скорее не неоклассическими, а аномальными процессами переноса в плазме. Поэтому ограничимся оценками β_p для некоторых радиальных профилей, которые будем считать заданными. Такие оценки показывают, что при $Z_{ef} \gg 1$ неоклассический ток обеспечивает требуемые для реактор-токамака значения β_p .

Несмотря на неопределенность радиальных распределений параметров плазмы, можно сделать некоторые заключения относительно распределения по радиусу генерируемого тока.

Рассмотрим окрестность магнитной оси, где ток генерируется почти исключительно α -частицами (т. е. $j_{\alpha e} \gg j_p$). Тогда из (2.25) с учетом равенства $q_0 = cB / (2\pi R j_{\alpha e})$ найдем [70]:

$$j_{\alpha e} = \frac{c v_{\alpha}}{a} \left[\frac{0.34 m_{\alpha}^2 c}{(2\pi)^2 e_{\alpha}} \frac{v_{\alpha} n_0}{R_0 A} \frac{\tau_{s0}}{\tau_{f0}} \left(1 - \frac{Z_{\alpha}}{Z_{ef}^0} \right) \right]^{1/3}. \quad (2.34)$$

Здесь $\tau_f = 4 / (n \langle \sigma v \rangle)$ — характерное время рождения α -частиц, индекс «0» относится к величинам, взятым при $r=0$, v_{α} — числовой множитель, зависящий от радиального профиля α -частиц и определяемый уравнением $\partial^2 n_{\alpha} / \partial r^2 = -v_{\alpha} n_{\alpha} / a^2$. Для численной оценки тока (2.34) возьмем $a=120$ см, $R=500$ см, $n_0=3 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $T_0=20$ кэВ, $Z_0=3$, $v_{\alpha}=8$, что дает $j_0=40$ А/см 2 . Этой плотности тока соответствует $q_0=4$. Поскольку генерируемый в плазме ток обеспечивает значение $\beta_p < A$, требуемое для равновесия плазмы в магнитном поле, то для токамака с достаточно большим β получим $q_a < q_0$. Это означает, что рассматриваемый токамак характеризуется током, который имеет максимум не на самой оси, а вблизи нее.

Отметим, что реактор-токамак с немонотонным распределением тока по радиусу обсуждался в связи с вопросом о поддержании тока в токамаках с помощью ВЧ-поля [71]. Такого рода распределения тока также наблюдались экспериментально, причем без признаков повышенной МГД-активности плазмы [72—74].

Важность использования неоклассического переноса в термоядерной плазме для генерации тока обусловлена тем, что это, по всей видимости, единственный шанс осуществить в установках типа токамак не вынужденную, а самоподдерживающуюся стационарную термоядерную реакцию. Полученное недавно экспериментальное доказательство существования бутстреп-тока в токамаке TFTR [48] позволяет с определенным оптимизмом смотреть на эту перспективу.

Вместе с тем следует указать на очевидное, но существенное обстоятельство переход к режиму с самоподдерживающимся током возможен лишь после того, как ток будет создан с помощью индуктора (или другого устройства, если использовать безындукционный метод) и параметры плазмы будут доведены до термоядерных.

Изложенная здесь теория стационарного токамака оставляет открытыми многие вопросы, связанные с переходом к режиму с

самоподдерживающимся током. Сценарии такого перехода, возможная МГД-активность и связанные с нею периодические изменения параметров плазмы в приосевой области и другие возможные нестационарные процессы требуют тщательного изучения. И, конечно, нужны прямые эксперименты, направленные на обнаружение и использование тока приосевых α -частиц.

2.2. Поддержание тока в токамаках инжекцией нейтральных атомов

2.2.1. Ток ионного пучка. При тангенциальной инжекции в плазму высокоэнергетических нейтральных атомов вследствие ионизации последних образуются высокоэнергетические ионы, обладающие направленной скоростью. Из-за кулоновских столкновений импульс быстрых ионов передается электронами ионам плазмы, что приводит к возникновению направленного движения этих компонентов плазмы. В результате в системе генерируется продольный ток, который состоит из тока пучка j_b , тока электронов j_e и тока ионов плазмы j_i :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i.$$

Очевидно, электронный ток протекает в направлении, противоположном направлению тока пучка. Токи j_b , j_e , j_i зависят от характера инжекции, энергии инжектируемых частиц, механизмов диссипации продольного импульса компонентов системы.

Необходимым условием достижения высокой плотности тока в плазме (j) является получение достаточно большого тока пучка. Решение этой задачи требует выбора энергии инжектируемых атомов, от которой зависят скорость торможения быстрых ионов и их направленная скорость. В случае $\mathcal{E} \ll T_e m_b / m_e$ (\mathcal{E} и m_b — энергия и масса инжектируемых частиц) отношение характерных времен торможения быстрых ионов на ионах плазмы и электронах есть $\tau_s^i / \tau_s^e = (\mathcal{E} / \mathcal{E}_c)^{3/2}$, где $\mathcal{E}_c \sim (m_b / m_e)^{1/3} T_e$. Видно, что при $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ доминирует торможение ионами, а при $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ — электронами; τ_s^e не зависит от \mathcal{E} , поэтому рост отношения τ_s^i / τ_s^e при увеличении \mathcal{E} обусловлен взаимодействием пучок — ионы. В области очень больших энергий нарушается условие $\mathcal{E} \ll m_b T_e / m_e$, по основным остается взаимодействие пучок — электроны, причем и оно ослабевает с ростом энергии пучка. Отсюда следует, что время жизни быстрых ионов, определяемое кулоновским торможением последних, наибольшее при $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$. Поскольку $j_b \sim n_b v_b \sim \tau_s v_b$, где v_b — скорость инжектируемых частиц, то заключаем, что для получения наибольшего j_b (при заданном потоке инжектируемых частиц) нужно использовать инжекцию с $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$. Однако в области $\mathcal{E}_c \ll \mathcal{E} \ll m_b T_e / m_e$ эффективность поддержания тока j_b падает с ростом энергии: $j_b / \rho \sim v_b^{-1}$, где ρ — вводимая в плазму мощность. С увеличением энергии ситуация улучшается, и в области $\mathcal{E} \gg m_b T_e / m_e$ $j_b / \rho \sim v_b^2$. К сожалению, последний случай, по-видимому, не реализуем в плазме с термоядерными параметрами, ибо

требуется инжекция частиц с энергиями в десятки мегаэлектрон-вольт. Поэтому с точки зрения обеспечения максимальной эффективности генерации тока в термоядерном реакторе оптимальной представляется энергия $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c$.

В силу сказанного при нахождении j_b будем считать выполненными условия $v_{Ti} \ll v_b \ll v_{Te}$, где $v_{Te,i} = (2T_{e,i}/m_{e,i})^{1/2}$. Кроме того, распределение по скоростям электронов и ионов плазмы будем полагать максвелловским, а кулоновскими столкновениями между ионами пучка пренебрежем, что оправдано в силу малости количества быстрых ионов. Тогда, ограничившись приближением прямого магнитного поля, уравнение для функции распределения ионов пучка в области скоростей $v > v_c$, дающих основной вклад в генерируемый ток, можно записать в следующем виде:

$$\tau_s^e \frac{\partial f_b}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [(v^3 + v_c^3) f_b] + \alpha \frac{v_c^3}{v^3} \frac{\partial}{\partial \chi} (1 - \chi^2) \frac{\partial f_b}{\partial \chi} + \tau_s^e S(r) f_b^0, \quad (2.35)$$

где f_b^0 — функция распределения быстрых ионов в момент их образования из инжектируемых атомов; $\int dv f_b^0 = 1$; $S(r)$ — локальная скорость рождения быстрых ионов;

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m_b}} = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{m_e}{n_e} \sum_i \frac{n_i Z_i^2}{m_i} \right)^{1/3} v_{Te}; \\ \alpha &= \frac{n_e Z_{ef}}{2m_b \sum_i n_i Z_i^2 / m_i}; \quad Z_{ef} = \sum_i \frac{n_i Z_i^2}{n_e}; \\ \tau_s^e &= \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \frac{m_e m_b v_{Te}}{c^4 \Lambda n_e Z_b^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Λ — кулоновский логарифм; Z_b , m_b — зарядовое число и масса ионов пучка; суммирование производится по сортам ионов.

Решение уравнения (2.35) удобно искать в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра, $f_b = \sum_n A_n(v) P_n(\chi)$, где $P_n(\chi)$ —

полином Лежандра. При этом для вычисления генерируемого в плазме тока достаточно найти первый коэффициент этого разложения, поскольку

$$j_b = \frac{4\pi}{3} e_b \int_0^\infty dv v^3 A_1(v). \quad (2.37)$$

Находим:

$$A_1 = \frac{3}{2} \frac{\tau_s S(r)}{v^3 + v_c^3} \int_0^{v_0} dv' v'^2 \left(\frac{v}{v'} \right)^{2\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right)^{\frac{2\alpha}{3}} \int_{-1}^1 d\chi \chi f_b^0(v, \chi). \quad (2.38)$$

Далее конкретизируем распределение инжектируемых частиц, взяв $f_b^0 = \delta(v - v_b) \delta(\chi - \chi_b) / (2\pi v_b^2)$. Тогда с помощью (2.37), (2.38) получим следующее выражение для тока [33, 78]:

$$j_b = e_b S(r) \tau_s^e \chi_b (v_b^2 / v_c) G(v_b / v_c), \quad (2.39)$$

где

$$G(y) = \frac{(1 - y^{-3})^{\frac{2\alpha}{3}}}{y^2} \int_0^y dt \left(\frac{t^3}{1 + t^3} \right)^{1 + \frac{2\alpha}{3}}, \quad y = \frac{v_b}{v_c}. \quad (2.40)$$

Учитывая, что инжектируемая в плазму плотность мощности есть $p = S(r) m_b v_b^2 / 2$, получаем локальную эффективность генерации тока пучка:

$$\frac{j_b}{p} = \frac{2e_b \tau_s^e \chi_b}{m_b v_c} G\left(\frac{v_b}{v_c}\right). \quad (2.41)$$

Из (2.41) следует, что зависимость отношения j_b/p от скорости пучка описывается функцией $G(y)$. Последняя, как нетрудно видеть, при $y \gg 1$ приближенно равна y^{-1} , а при $y \ll 1$ $G(y) = y^2 / (2\alpha + 4)$. Наличие простых выражений для $G(y)$ в области больших и малых скоростей, а также результаты численных расчетов позволяют записать аппроксимационное выражение для $G(y)$, которое в случае инжекции дейтерия (третия) в равнокомпонентную дейтерий-третиевую смесь имеет вид

$$G(y) = \frac{y^2}{2(\alpha + 2)} \exp(-1,3y^{0,78}) + \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{2,5}{y^{0,78}}\right), \quad (2.42)$$

где $\alpha = 0,6Z_{ef}$ при инжекции дейтерия и $\alpha = 0,4Z_{ef}$ при инжекции третия; $v_c = (3\sqrt{\pi} m_e / (2M))^{1/3}$; M — приведенная масса ионов дейтерия и третия. С помощью (2.42) заключаем, что эффективность генерации тока пучка в дейтерий-третиевой плазме максимальна при $y \approx 2,2$ (считаем $Z_{ef} \leq 4$), причем максимум функции $G(y)$ довольно пологий: $G(y)$ слабо меняется в области $1,9 < y < 2,8$. При увеличении содержания примесей G_{\max} медленно убывает, в частности: $G_{\max}(Z_{ef} = 1) = 0,2$, $G_{\max}(Z_{ef} = 4) = 0,16$.

Отметим, что для окончательного вывода об эффективности генерации тока инжекцией нейтральных атомов знания отношения j_b/p недостаточно, поскольку эффективность метода характеризуется отношением j/p .

2.2.2. Электронный ток в приближении однородного магнитного поля. Предположим, что доминирующим процессом, определяющим поступление импульса к электронам, являются кулоновские столкновения последних с ионами пучка, а процессом диссипации импульса электронов — их столкновения с покоящимися ионами плазмы. Тогда в стационарном состоянии справедливо следующее

уравнение баланса составляющей импульса электронов вдоль магнитного поля:

$$-\sum R_{ei} = R_{eb}, \quad (2.43)$$

где R_{ei} и R_{eb} — проекции на направление магнитного поля сил трения электронов об ионы плазмы и пучка соответственно, суммирование производится по сортам ионов.

Поскольку $R_{eb} = -R_{be}$, то при $v_b \ll v_e$ силу R_{eb} легко найти с помощью слагаемого в (2.35), которое описывает столкновения ионов пучка с электронами: $R_{eb} = m_b j_b / (e_b \tau_s^e)$. Для силы электрон-ионного трения используем выражение $R_{ei} = -m_e n_e V_e / \tau_{ei}$ (τ_{ei} — характерное время электрон-ионных столкновений, V_e — скорость направленного движения электронов), которое соответствует максвелловскому распределению ионов и такому же распределению электронов, но в движущейся со скоростью V_e системе координат. Тогда, учитывая, что $\tau_s^e \sum_i \tau_{ei}^{-1} = m_b Z_{ei} / (m_b Z_b^2)$, с помощью (2.43) по-

лучаем (1.22). Из (1.22) следует, что электронный ток сравним по величине с током пучка, а при $Z_b = Z_{ei}$ он полностью его компенсирует [1].

Частный случай $Z_b = Z_{ei}$, к сожалению, очень важен, поскольку он соответствует, например, инжекции дейтериевого или тритиевого пучка в беспримесную дейтерий-тритиевую плазму. Поэтому он требует проведения анализа, основанного на использовании более тонкой модели.

Очевидно, что на электронный ток оказывают влияние торoidalность системы, электронная вязкость и диффузия электронов поперек магнитного поля. Но и без этих факторов ток отличается от даваемого выражением (1.22), поскольку функция распределения электронов отлична от сдвинутой максвелловской [29, 75]. Уточним (1.22) с учетом этого обстоятельства.

Будем исходить из уравнения для функции распределения электронов вида

$$\sum_j C_{ej}^{\text{col}}(f_e, f_j) = 0, \quad j = e, i, b, \quad (2.44)$$

где C_{ej}^{col} — столкновительный оператор, описывающий кулоновские соударения электронов с частицами сорта j ; f_j — функция распределения частиц сорта j . Поскольку отличие f_e от максвелловской функции f_M считается связанным лишь с наличием пучка, функцию распределения представим в виде

$$f_e = f_M + f' \quad (2.45)$$

и линеаризуем уравнение (2.44), считая члены $C_{eb}(f_M, f_b)$ и $C_{ee}(f_M, f')$, $C_{ej}(f', f_j)$, где $j \neq b$, одного порядка малости. Для решения полученного уравнения используем метод, основанный на раз-

ложении искомой функции в ряд по полиномам Лежандра:

$$j' = \int_M \sum_n a_n(v) P_n(\chi). \quad (2.46)$$

Тогда, полагая для простоты $f_b \sim \delta(\chi - \chi_b) \delta(v - v_b)$ (что справедливо, например, если время перезарядки частиц пучка мало по сравнению со временем τ_s^e), можно прийти к следующему интегро-дифференциальному уравнению для a_1 [75]:

$$a_1'' + P(x) a_1' + Q(x) a_1 - \frac{16}{3\sqrt{\pi}\mu(x^2)} [xI_3(x) - 1,2xI_5(x) - x^4(1 - 1,2x^2)(I_0(x) - I_0(\infty))] = R(x), \quad (2.47)$$

где $x = v/v_{Te}$;

$$P(x) = -\frac{1}{x} - 2x + 2x^2\Phi(x)/\mu(x^2); \quad (2.48)$$

$$Q(x) = \frac{1}{x^2} - 2(Z_{ef} + \Phi(x) - 2x^2\Phi'(x))/\mu(x^2); \quad (2.49)$$

$$R(x) = \frac{4x_b n_b}{n\mu(x^2)} \begin{cases} \frac{v_{Te}^2}{v_b^2} (1,2x^6 - 2x^4) & \text{при } x < \frac{v_b}{v_{Te}}; \\ \left(\frac{v_b}{v_{Te}} + 1,2\frac{v_b^3}{v_{Te}^3}\right)x & \text{при } x > \frac{v_b}{v_{Te}}; \end{cases} \quad (2.50)$$

$$I_n(x) = \int_0^x a_1(y) e^{-y^2} y^n dy; \quad (2.51)$$

$$\mu(x^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} e^{-t} \sqrt{t} dt; \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (2.52)$$

Решить уравнение (2.47) наиболее просто в случае $Z_{ef} \gg 1$, когда можно пренебречь слагаемым с интегралами от a_1 и с производными a_1' и a_1'' (эти слагаемые связаны с электрон-электронными столкновениями). Находим:

$$a_1(x) = -\frac{\mu(x^2)}{2Z_{ef}} R(x). \quad (2.53)$$

Заметим, что

$$j_e = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} env_{Te} I_3(\infty), \quad (2.54)$$

причем в интересующем нас случае $v_b \ll v_{Te}$ основной вклад в интеграл $I_3(\infty)$ дает область $x > v_b/v_{Te}$. Последнее означает, что для вычисления тока достаточно знать $a_1(x)$ в области $x > v_b/v_{Te}$.

В этой области при $Z_{ei} = 1$ $a_1(x) \sim x$. Предположим, что такая же зависимость a_1 от x существует при любом Z_{ei} , положив $a_1(x) = \hat{a}_1 x$, где $\hat{a}_1 = \text{const}$. Подстановка этого выражения в (2.47) и (2.51) приводит к решению, совпадающему с (2.53) при $x > v_b/v_{Te}$. Следует сказать, что вычисление интегралов $I_3(x)$ и $I_5(x)$ с $a_1 = \hat{a}_1 x$ оправдано лишь для $x \gg v_b/v_{Te}$, поэтому с учетом электрон-электронных столкновений линейная зависимость a_1 от x имеет место лишь для таких x . Но это не столь существенно, ибо основной вклад в ток дает область $x \sim 1$.

С помощью (2.53), (2.54) получаем:

$$j_e = -j_b Z_b / Z_{ei} (1 + 1,2 v_b^2 / v_{Te}^2). \quad (2.55)$$

Из (2.55) следует, что учет отличия функции распределения электронов от сдвинутого максвелловского привел лишь к малой поправке в выражении для тока электронов. Поэтому при $Z_b = Z_{ei}$ электронный ток практически компенсирует ток пучка: $j = |j_b + j_e| \ll j_b$.

Для полноты картины обсудим вопрос о токе при нарушении условия $v_b \ll v_{Te}$. Если выполнено противоположное условие, $v_b \gg v_{Te}$, то сила трения электронов об ионы пучка падает приблизительно в $(v_b/v_{Te})^3$ раз. С помощью (2.43) заключаем, что во столько же раз падает электронный ток, следовательно, $j = |j_b + j_e| \approx j_b$. Этот вывод подтверждают расчеты, основанные на численном интегрировании уравнения (2.47), которые были проведены в [75] для широкого диапазона изменения значений v_b/v_{Te} .

2.2.3. Влияние тороидальности на электронный ток. Эффекты, связанные с тороидальностью магнитного поля, особенно существенны в режиме редких столкновений (в банановом режиме), который характерен для реакторной плазмы. Поэтому ниже рассмотрим вопрос об электронном токе увлечения, полагая, что плазма находится в банановом режиме. Относительно скорости инжектируемых частиц будем предполагать, что она удовлетворяет условию $v_{Ti} \ll v_b \ll v_{Te}$.

В качестве исходного используем кинетическое уравнение для функции распределения электронов, которое отличается от уравнения (2.44) наличием слагаемого, связанного со структурой магнитного поля токамака. Это уравнение для поправки к функции распределения f' [см. (2.45)] в дрейфовом приближении имеет вид

$$\frac{v_{\parallel}}{v} \theta \frac{\partial f'}{\partial \theta} = C_{ee}(f', f_M) + C_{ei}(f', f'_i) + C_{eb}(f_M, f_b), \quad (2.56)$$

где $\theta = \varepsilon/q$, $\varepsilon = r/R$; q — коэффициент запаса токамака.

Электрон-электронные столкновения учтем с помощью модельного столкновительного члена, предложенного в [76]. Используем малость отношения v/ω_b (ω_b — баунс-частота), разложив f' в ряд по этому параметру:

$$f' = \bar{f} + (v/\omega_b) f_1. \quad (2.57)$$

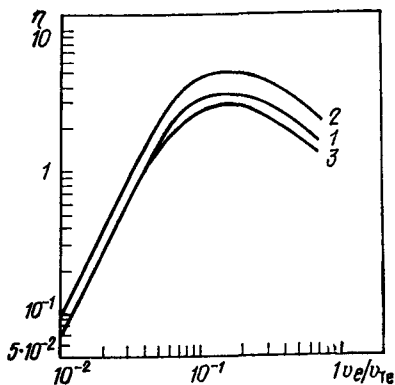
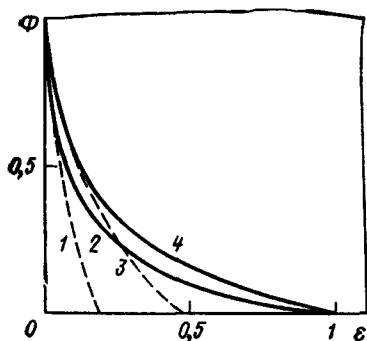


Рис. 2.3. Функция $\Phi(\varepsilon)$ при $Z_{ef}=1$ (1, 2) и $Z_{ef}=\infty$ (3, 4). Пунктирные линии соответствуют аппроксимационной формуле $\Phi(\varepsilon)=1 \div 1,46A(Z_{ef})\sqrt{\varepsilon}$, где $A(1)=1,68$, $A(\infty)=1$.

Рис. 2.4. Зависимость безразмерной эффективности генерации тока $\tilde{\eta}$ в равнокомпонентной дейтерий-тритиевой плазме в случае тангенциальной инжекции пучка дейтронов от ν_b/ν_{Te} при $\varepsilon=0$, $Z_{ef}=2$ (1); $\varepsilon=0,1$, $Z_{ef}=2$ (2); $\varepsilon=0,1$, $Z_{ef}=1$ (3). Связь с размерной эффективностью дается соотношением $\tilde{\eta} \equiv \frac{j_b - j_e}{p} = \frac{0,77T_e}{n_{20}\Lambda_{ef}} \tilde{\eta}$, где T_e — в кэВ, $n_{20} \equiv n/10^{20}$; n — в м³; $\tilde{\eta}$ — в А·м/Вт

Тогда можно прийти к следующему выражению для плотности тока электронов [32]:

$$j_e = - \frac{\langle \sum_i en_i Z_i^2 V_i + en_b Z_b^2 v_b \rangle}{Z_{ef}} \frac{B}{\langle B \rangle} \Phi(\varepsilon, Z_{ef}), \quad (2.58)$$

где

$$\Phi(\varepsilon, Z_{ef}) = \hat{I} \left\{ 1 - \frac{0,71}{\sqrt{\pi}} (1 - \hat{I}) \int_0^{\infty} \frac{H(x)x^{3/2} e^{-x}}{H(x) + Z_{ef}} dx \right. \\ \left. + \hat{I} Z_{ef} \int_0^{\infty} \frac{H(x)e^{-x} dx}{H(x) + Z_{ef}} \right\}. \quad (2.59)$$

Для малых ε $I(\varepsilon) = 1 - 1,46\sqrt{\varepsilon}$, и выражение (2.58) переходит в соответствующее выражение работ [30, 31], если положить $V_i = -m_b n_b v_b / (m_i n_i)$. Отметим, что в [31] выражение для тока электронов получено с использованием не модельного, а точного интеграла электрон-электронных столкновений.

Формула (2.58) справедлива при произвольных ε и Z_{ef} . В частности, при $Z_{ef}=1$ $\Phi = I(0,913 + 0,087I) / (1,593 - 0,593I)$. Если $Z_{ef} \gg \gg 1$, то влиянием межэлектронных столкновений можно пренебречь и $\Phi = I$.

На рис. 2.3 приведены графики функций $\Phi(\epsilon)$ при $Z_{ef}=1$ и $Z_{ef} \gg 1$. Пунктирными линиями показаны результаты, следующие из [30]. Из графиков видно, что использование результатов [30] оправдано лишь при малых ϵ . Особенно мала область применимости, если $Z_{ef}=1$: в этом случае она ограничена условием $\epsilon < 0,1$. При $V_i=0$ с помощью (2.58) можно получить отношение токов $\langle |j_e + j_b| \rangle / \langle j_b \rangle$, совпадающее с найденным в [79].

В заключение с целью иллюстрации приведем на рис. 2.4 зависимость от $x = v_b/v_{Te}$ эффективности генерации тока пучком инжектируемых атомов в приближении прямого магнитного поля и с учетом тороидальности при $\epsilon=0,1$ для $Z_{ef}=1$ и $Z_{ef}=2$, считая скорость тороидального вращения ионного компонента плазмы пренебрежимо малой.

2.2.4. Проблема диссипации импульса плазмы и способ поддержания тока встречными пучками ионов. При инжекции высокоэнергетичных нейтральных атомов в плазму непрерывно вводится импульс. Поэтому если бы отсутствовали механизмы диссипации тороидального импульса, инжекция привела бы к вращению плазмы как целого со скоростью инжектируемых частиц. В действительности, конечно, всегда происходит диссипация импульса, а следовательно, устанавливаются различные направления скорости электронов и ионов. Вопрос, однако, в том, насколько эффективно происходит диссипация, обеспечивает ли она приемлемую скорость вращения плазмы при использовании инжекции для поддержания стационарного тока. Выше мы неявно предполагали, что существует положительный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим, каким требованиям должно удовлетворять характерное время диссипации тороидального импульса ионов плазмы (τ_{vi}). С этой целью запишем стационарное уравнение баланса импульса ионов в виде

$$m_i n_i V_i / \tau_{vi} = R_{ie} + R_{ib}, \quad (2.60)$$

где R_{ie} и R_{ib} — сила трения ионов об электроны и частицы пучка. Примем во внимание, что из соображений равновесия и устойчивости плазмы V_i не должна превышать некоторой критической величины v_{cr} (для оценок разумно считать $v_{cr} \leq v_{Ti}$), и положим $R_{ie} = m_e n_e V_e / \tau_{ei}^{ef}$, где τ_{ei}^{ef} — время обмена импульсом между электронами и ионами, которое может отличаться от классического времени τ_{ei} . Тогда с помощью (2.60) получим следующее требование:

$$\frac{m_e V_e}{m_i v_{cr}} \frac{\tau_{vt}}{\tau_{ei}^{ef}} + \frac{R_{ib} \tau_{vi}}{m_i n_i v_{cr}} < 1. \quad (2.61)$$

В случае, когда τ_{vi} определяется неоклассической вязкостью [9], из (2.61) находим:

$$\frac{10}{q^2} \frac{a^2}{\rho_{Bi}^2} \frac{\tau_{ei}}{\tau_{ei}^{ef}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{V_e}{v_{cr}} < 1, \quad (2.62)$$

где ρ_{Bi} — ларморовский радиус ионов плазмы. В действительности условие более жестко, так как при получении (2.62) не учитыва-

лось второе слагаемое в (2.61). Но и (2.62) невыполнимо для термоядерного реактора.

Значительно более мощный механизм диссипации импульса плазмы связан с гофрировкой продольного магнитного поля токамака, но лишь в режиме, когда существуют локально запертые тепловые ионы. Об этом свидетельствуют расчеты, проведенные в [80], которые хорошо согласуются с данными экспериментов по изучению вращения плазмы на токамаках PLT [81—83] и ISX-B [84]. В токамаках со слабой гофрировкой основной диссипативный механизм связан, по-видимому, с аномальной вязкостью [85]. Есть расчеты, которые свидетельствуют, что при больших скоростях вращения плазмы, $V_i \sim v_i$, неклассическая вязкость существенно возрастает [86]. Правда, расчеты в [86] выполнены для плазмы в столкновительном режиме.

Экспериментальные данные свидетельствуют, что при инжекции возможно устойчивое стационарное вращение плазмы, притом с высокой скоростью. В зависимости от конкретных условий главным является тот или иной механизм диссипации тороидального импульса плазмы. В то же время ни имеющиеся экспериментальные данные, ни результаты теоретических исследований не позволяют дать однозначный ответ на вопрос, будет ли удовлетворяться требование (2.61) в реакторных условиях при поддержании тока за счет инжекции быстрых атомов. Поэтому ясна важность способов поддержания тока, которые не сопровождаются вводом тороидального импульса в плазму.

Впервые такой способ был предложен в работе Окавы [1], причем это была первая работа, где предлагалось использовать инжекцию для поддержания тока. Согласно [1], в плазму следует инжектировать два встречных пучка с сильно различающимися характеристиками. Энергию частиц первого пучка, служащего для создания тока, необходимо выбирать равной нескольким мегаэлектрон-вольтам, тогда как энергию частиц второго пучка, служащего для подавления тороидального вращения плазмы, — равной нескольким десяткам килоэлектрон-вольт. Интенсивность второго пучка должна более чем на порядок превышать интенсивность первого пучка.

Этот способ поддержания тока труднореализуем по следующим причинам. Во-первых, из-за большого различия между длинами ионизации первого и второго пучков невозможно обеспечить подобные профили поглощения, необходимые для локальной (по радиусу плазмы) компенсации тороидальной составляющей импульса пучков. Во-вторых, для создания пучков требуется применение инжекционных систем различных типов. В-третьих, скорость тороидального вращения плазмы может оказаться очень большой — порядка токовой скорости электронов, а это приводит к значительному снижению генерируемого тока.

Рассмотрим предложенный в [33] способ поддержания тока, который также основан на использовании инжекции встречных

пучков нейтральных атомов, но который свободен от указанных недостатков.

Введем гидродинамическую скорость системы плазма — пучки:

$$\mathbf{V} = \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e + m_1 n_1 \mathbf{v}_1 + m_2 n_2 \mathbf{v}_2}{m_i n_i + m_e n_e + m_1 n_1 + m_2 n_2}, \quad (2.63)$$

где индексы «1» и «2» относятся к параметрам первого и второго пучков. Предположим, что осуществляется такая инжекция, при которой тороидальная составляющая суммарного импульса инжектируемых частиц равна нулю:

$$M_1 + M_2 = 0, \quad (2.64)$$

где M_1 и M_2 — тороидальные составляющие импульсов частиц, инжектируемых в плазму в единицу времени. Благодаря (2.64), на временах, малых по сравнению с характерным временем диссипации импульса системы, τ_V , справедлив закон сохранения тороидальной составляющей импульса частиц плазмы и пучков:

$$m_i n_i V_{i\varphi} + m_e n_e V_{e\varphi} + m_1 n_1 v_{1\varphi} + m_2 n_2 v_{2\varphi} = 0. \quad (2.65)$$

Поэтому при $\Delta t \ll \tau_V$ $v_\varphi \simeq 0$, но при этом скорость вращения ионов плазмы может быть высокой: $V_{i\varphi} \sim V_{e\varphi}$ [учтены (2.55), (2.65)]. При $\Delta t \ll \tau_V$ устанавливается стационарное состояние, в котором $V_{i\varphi} \ll V_{e\varphi}$ [использованы уравнения движения для электронного и ионного компонентов плазмы и условие (2.64)]:

$$V_{i\varphi} = - \frac{m_e}{m_i} \frac{\tau_{Vi}}{\tau_{Ve}} V_{e\varphi}, \quad (2.66)$$

где τ_{Vi} и τ_{Ve} — времена диссипации импульса ионов и электронов. Однако при этом гидродинамическая скорость V может стать недопустимо высокой ($V \sim V_e$).

Чтобы не допустить высокой гидродинамической скорости всей системы (V) и скорости V_i , потребуем обращения в нуль суммарного импульса пучковых компонентов:

$$m_1 n_1 v_{1\varphi} + m_2 n_2 v_{2\varphi} = 0. \quad (2.67)$$

Отметим, что это условие совместимо с условием отличия от нуля суммарного тока пучковых компонентов ($n_1 v_{1\varphi} + n_2 v_{2\varphi} \neq 0$), только если $m_1 \neq m_2$. Поэтому будем полагать, что в плазму инжектируются пучки дейтерия и трития. Индекс «1» будем относить к дейтериевому пучку, индекс «2» — к тритиевому.

Для нахождения входящих в (2.67) произведений $n_1 v_{1\varphi}$ и $n_2 v_{2\varphi}$ используем выражение для тока пучка (2.39), а также следующее соотношение:

$$M_b = v_p m_b \frac{S(r)}{\bar{\Psi}_b(r)} v_b \chi_b, \quad (2.68)$$

где v_p — объем плазмы; $\bar{\Psi}_b(r)/S(r) = \text{const}$; $\bar{\Psi}_b = 1$; черта означает усреднение по сечению плазмы. Соотношение (2.68) получено с помощью первого момента уравнения (2.35).

Имеем:

$$n_k v_{k\varphi} = \frac{M_k}{v_p} \frac{\tau_e}{m_e} \Psi_k(r) \frac{v_k}{v_c} G\left(\frac{v_k}{v_c}\right), \quad k = 1, 2; \quad (2.69)$$

где $\tau_e = \left(\frac{m_e}{m_b}\right) \tau_s^e$ — время электронных столкновений.

Подстановка (2.69) в (2.67) с учетом (2.64) дает:

$$m_1 \Psi_1(r) v_1 G(v_1/v_c) = m_2 \Psi_2(r) v_2 G(v_2/v_c). \quad (2.70)$$

При близких профилях поглощения атомов дейтерия и трития $\Psi_1 \simeq \Psi_2$ (возможность реализации этого условия рассмотрим ниже) и $v_{Ti}/v_c \ll v_1/v_2 \leq 2$, что соответствует диапазону энергий $T_i \ll \ll \mathcal{E}_1 \leq 70T_e(0)$ (\mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — энергия инжектируемых дейтронов и тритонов), из (2.70) можно получить следующее приближенное выражение для отношения $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} \simeq \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/3} \left(\frac{Z_{\text{ef}}(0) + 5}{Z_{\text{ef}}(0) + 3,333}\right)^{2/3} / \left[1 + 1,2 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\mathcal{E}_1}{T_e(0)}\right)^{3/2}\right]^{2/3}. \quad (2.71)$$

При этом интенсивности инжекции частиц (I_1 и I_2) согласно (2.64) должны удовлетворять соотношению

$$I_2/I_1 = \sqrt{m\mathcal{E}_1/(m_2\mathcal{E}_2)}. \quad (2.72)$$

Отметим, что на качественном уровне отношение энергий $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$ может быть получено на основе простых соображений. Так, в силу (2.64) в стационарном состоянии силы трения, действующие на плазму со стороны дейтериевого и тритиевого пучков, равны и противоположны по направлению, т. е.

$$m_1 n_1 v_{1\varphi} / \tau_1 + m_2 n_2 v_{2\varphi} / \tau_2 = 0, \quad (2.73)$$

где τ_1 и τ_2 — характерные времена торможения дейтронов и тритонов в плазме. Отсюда следует, что условие (2.67) можно выполнить лишь при $\tau_1 = \tau_2$.

В случае $|v_{1\varphi}| \leq v_c$, $|v_{2\varphi}| \leq v_c$ имеем $\tau_1 \sim m_1^2 v_{1\varphi}^3$, $\tau_2 \sim m_2^2 v_{2\varphi}^3$, поэтому равенство времен торможения пучков дает $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \sim \sim (m_1/m_2)^{1/3}$.

Итак, при осуществлении тангенциальной инжекции встречных пучков дейтронов и тритонов с близкими характеристиками, удовлетворяющими условиям (2.71), (2.72), скорости тороидального вращения V и V_i будут низкими. Однако это достигается ценой снижения эффективности генерации тока по сравнению со случаем, когда диссипативные процессы в плазме настолько велики, что можно инжектировать один пучок. Так, генерируемый ток падает в 3 раза (поскольку $j_2 = -\frac{2}{3}j_1$), а вводимая мощность возрастает почти в 2 раза.

Обсудим полученные результаты с точки зрения практического применения. Прежде всего отметим, что при $\lambda_1/\lambda_2 \sim 1,5$ и $a/\lambda_1 \sim \sim 1$ (λ_1 и λ_2 — длины ионизации дейтронов и тритонов) можно добиться близости профилей Ψ_1 и Ψ_2 за счет некоторого различия в

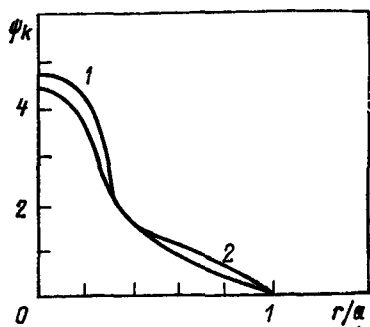


Рис. 2.5. Радиальные профили поглощения атомов дейтерия (1) и атомов трития (2)

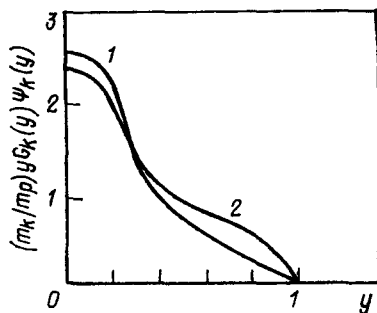


Рис. 2.6. Функция $(m_k/m_p) y G_k(y) \times \Psi_k(y)$ для пучка дейтронов (1) и тритонов (2)

положениях инжекторов [87]. Хотя этот результат в [87] получен для установки ОРМАК, аналогичные расчеты, произведенные в [33] при реакторных параметрах плазмы и пучка, подтверждают данный вывод [при реакторных параметрах легче добиться близких профилей $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$, так как эффекты конечных орбит частиц менее выражены и различие между инжекцией по току и против тока менее существенно]. Для иллюстрации на рис. 2.5 показаны полученные функции $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$. Как и в [87], предполагается, что оба пучка имеют форму цилиндра с одинаковым радиусом r_b . Инжекция производится так, что оси цилиндров лежат в экваториальной плоскости тора; центры дейтериевого и тритиевого пучков находятся на расстоянии $3,58a$ и $3,1a$ от главной оси тора соответственно. В расчетах также полагалось, что отношение r_b/a составляет 0,25; $R/a=3,5$; $a/\lambda_1=1$; $a/\lambda_2=1,5$. В частности, таким соотношениям удовлетворяют пучки с $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=1,5$ МэВ при $a=410$ см, $\bar{n}_e=5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$. Используя эти параметры и полагая $T_e=20$ кэВ, $Z_{ef}=2$, получаем зависимость от радиуса функций, входящих в условие (2.70) (рис. 2.6). Видно, что условие (2.70) хорошо выполняется в центральной области плазмы и несколько хуже на периферии. Однако можно думать, что с учетом диссипативных эффектов имеющая место некоторая некомпенсация импульса приведет к малой скорости тороидального вращения плазмы (на периферии больше, чем в центре, гофрировка магнитного поля и сильнее влияние стенки).

В рассмотренном примере другие параметры реактора-токамака могут быть следующими: $I=11,4$ МА, $I_1=1,76 \cdot 10^{21}$ част./с, $I_2=0,82I_1$, $B=4,5$ Тл. Тепловая мощность реактора составит около 14 ГВт, а его добротность $Q=18$.

2.3. Токи ВЧ-увлечения в плазме

2.3.1. Одномерная теория поддержания тока в плазме узким пакетом волн. Плотность тока j и эффективность j/p в режиме слабых столкновений. При поддержании тока в токамаке волнами с

частотами $k_{\parallel} v_{T_e} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ физическая картина генерируемых токов наиболее проста и наглядна. В этом случае волны, бегущие вдоль магнитного поля, передают импульс электронам и увлекают их за собой (отсюда название «токи увлечения»). В свою очередь, электроны передают импульс ионам, что приводит к установлению некоторой направленной скорости вращения плазмы в целом. Но если диссипация тороидального импульса ионов достаточно сильна, то можно пренебречь движением ионов и считать, что токоперенос осуществляется лишь электронами. Очевидно, можно говорить об определенной аналогии между процессами возбуждения тока в плазме бегущими волнами и с помощью индукционного электрического поля: в обоих случаях ток генерируется за счет ввода с помощью внешних устройств импульса вдоль магнитного поля в электронный компонент плазмы. Но есть и существенное различие: большая часть ВЧ-мощности неизбежно тратится на нагрев плазмы, не связанный с электрон-ионным трением (в отличие от омического нагрева плазмы). Чтобы убедиться в этом, запишем слагаемое квазилинейного уравнения, которое описывает взаимодействие волна — частица:

$$Q = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D^{QL} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}}, \quad (2.74)$$

где D^{QL} — коэффициент квазилинейной диффузии; v_{\parallel} — скорость частиц вдоль магнитного поля. Из (2.74) следует, что импульс M^{QL} и энергия p^{QL} , вводимые в плазму в единицу времени, определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} M^{QL} &= -m_e \int dv D^{QL} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}}; \\ p^{QL} &= -m_e \int dv D^{QL} v_{\parallel} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} = \bar{v}_{\phi} M^{QL}, \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

где \bar{v}_{ϕ} — среднее значение фазовой скорости волн вдоль магнитного поля. Считая, что вводимый импульс компенсируется силой электрон-ионного трения R_{ei} , т. е. $M^{QL} = R_{ei}$, и учитывая (2.75), находим отношение энергии, диссипируемой вследствие электрон-ионного трения (p^R), ко всей поглощаемой энергии ВЧ-поля (p^{QL}):

$$\frac{p^R}{p^{QL}} = \frac{R_{ei} V_e}{M^{QL} \bar{v}_{\phi}} = \frac{V_e}{\bar{v}_{\phi}}. \quad (2.76)$$

Это отношение мало, поскольку $V_e / \bar{v}_{\phi} \ll 1$. В справедливости последнего неравенства легко убедиться, если учесть, что $j \sim enV_e \sim \sim en_r v_{\phi}$, где n_r — количество резонансных электронов, взаимодействующих с волнами, $n_r/n \ll 1$.

Несмотря на ясность физической картины и простоту идеи, положенной в основу способа поддержания тока пакетом волн с $k_{\parallel} \neq 0$, строгое решение задачи затруднено в связи с искажени-

ем функции распределения электронов вне резонансной области, неоднородностью задачи и тороидальностью системы.

В этом разделе мы ограничимся приближением прямого магнитного поля. В качестве исходного используем следующее кинетическое уравнение для функции распределения электронов:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D^{QL}(\mathbf{v}) \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} + C^{col} = 0. \quad (2.77)$$

Здесь C^{col} — интеграл электрон-ионных и электрон-электронных столкновений в форме Ландау [88]. Получим решение (2.77) при упрощающем предположении, что $f_e(\mathbf{v}) = f_M(\mathbf{v}_{\perp}) j(v_{\parallel})$, где $f_M(\mathbf{v}_{\perp})$ — максвелловское распределение по поперечным скоростям. Это предположение позволяет привести уравнение (2.77) к одномерному путем интегрирования по поперечным скоростям. Можно надеяться на оправданность такого подхода в силу структуры квазилинейного оператора (границы применимости и точность получаемых при этом результатов обсудим в конце этого раздела и в п. 2.3.2). Относительно ионов будем предполагать, что они покоятся и обладают максвелловским распределением. Тогда для функции $f \equiv j(v_{\parallel})$ можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = - \frac{f}{D_{\parallel}^{QL} + D^c} \left\{ \frac{2v_{\parallel}}{v_{Te}^2} D^c - \int_{-\infty}^{\infty} dv'_{\parallel} \tilde{D}^{ee} \left[\frac{\partial f'}{\partial v'_{\parallel}} + \frac{2v'_{\parallel}}{v_{Te}^2} j' \right] \right\}, \quad (2.78)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel}^{QL} &= \int d\mathbf{v}_{\perp} f_{Me}(\mathbf{v}_{\perp}) D^{QL}(\mathbf{v}); \quad D^c = D^{ee} + \sum D^{ei}; \\ D^{ee} &= \int_{-\infty}^{\infty} dv'_{\parallel} j' \tilde{D}^{ee}(v_{\parallel}, v'_{\parallel}); \\ \tilde{D}^{ee} &= \frac{2\pi e^4 \Lambda}{m_e^2} \int d\mathbf{v}_{\perp} f_{Me}(\mathbf{v}_{\perp}) \int dv'_{\perp} f_{M}(v'_{\perp}) \frac{\partial^2}{\partial v_{\parallel}^2} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|; \\ D^{ei} &= \int_0^{v_{Te}/v_{Ti}} \frac{v_{Te}^{1/2} v_{Ti} dt \sqrt{t} \exp\{-v_{\parallel}^2 t/v_e^2\}}{(1+t)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

$$\tau_{ej} = \frac{m_e v_{Te}^3}{4\sqrt{\pi} n_j e^2 e_j^2 \Lambda}; \quad v_{Tj}^2 = \frac{2T_j}{m_j}; \quad j = e, i.$$

При решении (2.78) будем следовать [89]. Произведем преобразование в (2.78), последовательно подставляя значения производной, определяемые правой частью уравнения, в подынтегральное выражение

$$\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = \frac{2f}{v_{Te}^2 [D_{\parallel}^{QL} + D^c]} \left\{ v_{\parallel} (D^c + \tilde{D}^{ei}) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}^n v_{\parallel} D'^{QL} \right\}, \quad (2.81)$$

где $D'^{QL} = D^{QL}(v'_{\parallel})$, $\hat{L}^n \equiv \hat{L}^n(v_{\parallel}, v'_{\parallel})$ — интегральные операторы ($n = 1, 2, \dots$), которые имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}(v_{\parallel}, v'_{\parallel}) &\equiv \hat{L}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} dv'_{\parallel} \tilde{D}^{ee}(v_{\parallel}, v'_{\parallel}) \frac{f'}{D_{\parallel}^{QL} + D'^c}; \\ \hat{L}^n(v_{\parallel}, v'_{\parallel}) &\equiv \hat{L}(v_{\perp}, v_{\parallel}^{(n-1)}) \hat{L}(v_{\parallel}^{(n-1)}, v_{\parallel}^{(n-2)}) \dots \\ &\dots \hat{L}(v_{\parallel}^{(2)}, v_{\parallel}^{(1)}) \hat{L}(v_{\parallel}^{(1)}, v'_{\parallel}), \quad n \geq 2. \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Формальное решение уравнения (2.81) дает:

$$f = f(0) \exp \left\{ -\frac{v_{\parallel}}{v_{Te}^2} + \frac{2}{v_{Te}^2} \int_0^{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{D_{\parallel}^{QL} + D^c} \left[v_{\parallel} D_{\parallel}^{QL} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}^n v'_{\parallel} D'^{QL} \right] \right\}. \quad (2.83)$$

С помощью (2.83) нетрудно получить выражение для продольного тока в плазме:

$$j = e \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{f}{D_{\parallel}^{QL} + D^c} \left\{ v_{\parallel} D_{\parallel}^{QL} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}^n v'_{\parallel} D'^{QL} \right\}. \quad (2.84)$$

Здесь первое слагаемое связано с отличием функции распределения частиц от максвелловской в резонансной области $\Delta v_r = v_2 - v_1$, где $v_{1,2} = \omega/k_{1,2}$, k_1 и k_2 — верхняя и нижняя границы спектра по k_{\parallel} возбужденных волн, ω — их частота; второе слагаемое в (2.84) обусловлено искажением распределения частиц вне резонансной области.

Выражение (2.84) удобно представить в виде интеграла по резонансной области. Для этого примем во внимание справедливость тождества (использовано определение оператора \hat{L}):

$$D^{ee} - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}^n (D_{\parallel}^{QL} + D'^{ei}) = 0, \quad (2.85)$$

которое умножим на $f v_{\parallel} D_{\parallel}^{QL} / (D_{\parallel}^{QL} + D^c)$ и проинтегрируем по v_{\parallel} . С помощью полученного соотношения, полагая малым количество резонансных частиц ($n_r/n \ll 1$), находим:

$$j = e \int_{v_1}^{v_2} dv_{\parallel} v_{\parallel} f \frac{D_{\parallel}^{QL}}{D_{\parallel}^{QL} + D^c} \left\{ 1 + \frac{D^{ee}}{\langle D^{ei} \rangle} \right\}. \quad (2.86)$$

Здесь

$$f = f(0) \exp \left\{ -\frac{v_{\parallel}^2}{v_{Te}^2} + \frac{2}{v_{Te}^2} \int_0^{v_{\parallel}} \frac{D_{\parallel}^{QL}}{D_{\parallel}^{QL} + D^c} v_{\parallel} dv_{\parallel} \right\}, \quad (2.87)$$

$$\langle D^{ei} \rangle = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} f \frac{\Delta}{D^e} \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} f \frac{\Delta}{1 + D^{ee}/D^{ei}}; \quad (2.88)$$

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}^n v' D'^{QL}. \quad (2.89)$$

Отметим, что выражение для f вида (2.87) найдено также в [90—93].

Для поглощаемой ВЧ-мощности

$$p = \frac{2m_e}{v_{Te}^2} \int_{v_1}^{v_2} dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 f \frac{D^e D^{QL}}{D^e + D^{QL}}, \quad (2.90)$$

где f дается выражением (2.87).

Условие малости отношения n_r/n , использованное при получении выражений для генерируемого тока и поглощаемой мощности, выполняется, если справедливо одно из следующих неравенств:

$$(v_2 - v_1)/v_{Te} \ll 1, \quad (2.91)$$

$$(2\pi)^{-1/2} \exp\{-v_1^2/v_{Te}^2\} \ll 1. \quad (2.92)$$

В первом случае спектр волн должен быть достаточно узким, а во втором — скорость резонансных частиц должна существенно превышать тепловую скорость электронов. Мы здесь будем полагать выполненным условие (2.91), а на отношение v_{ϕ}/v_{Te} ограничений накладывать не будем (случай широкого спектра волн, характеризующихся высокими фазовыми скоростями, рассмотрим в п. 2.3.3).

Найдем входящие в подынтегральные выражения для j и p коэффициенты диффузии D^{ee} , D^{ei} , $\langle D^{ei} \rangle$. Это можно сделать, положив в (2.79), (2.80) $f_e(v_{\parallel}) = |m(v_{\parallel})|$, что оправдано для узкого спектра возбужденных волн. Тогда

$$\begin{aligned} D^{ee}(\lambda) &= \frac{2v_{Te}^2}{\tau_{ee}} \int_0^1 \frac{dt \sqrt{t} \exp\{-x^2 t/2\}}{(1+t)^2} = \\ &= \frac{v_{Te}^2}{2\tau_{ee}} \left\{ \pi(1+\lambda^2) \left[1 - \Phi^2(\lambda/\sqrt{2}) \exp(x^2/2) - 2\sqrt{2}\pi\lambda\Phi(x/\sqrt{2}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\exp(-x^2/2) \right]; \right. \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$D^{ei}(\lambda) = \frac{v_{Te}^2}{2\tau_{ei}} \left\{ \pi(1+\lambda^2) \exp(x^2/2) \left[1 - \Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\pi|x| \right], \right. \quad (2.94)$$

где $x = \sqrt{2}v_{\parallel}/v_{Te}$; $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dy e^{-y^2}$. Функция $D^{ee}(x)$ и $D^{ei}(x)$ изображены на рис. 2.7.

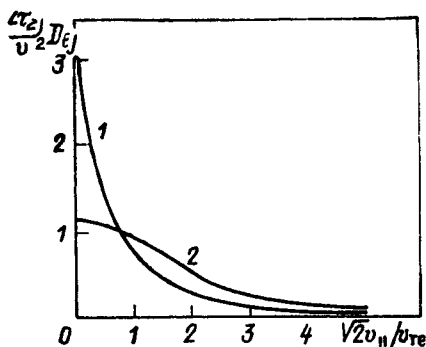


Рис. 2.7. Зависимость диффузионных коэффициентов $D_{ei}(\sqrt{2}v_{||}/v_{Te})$ (1) и $D_{ee}(\sqrt{2}v_{||}/v_{Te})$ (2) от $v_{||}$ при $Z_i = 1$

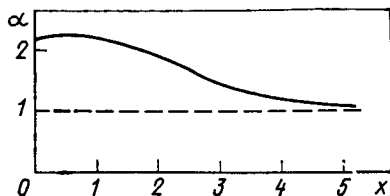


Рис. 2.8. Функция $\alpha(x, Z_{vi})$ в выражении для силы тока; $x = \sqrt{2}v_{||}/v_{Te}$

Чтобы вычислить $\langle D^{ei} \rangle$, определим зависимость $\Delta = x_r \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}^n D_{||}^{QL}$ от x_r , где $x_1 < x_r < x_2$. Как следует из соотношения (2.89), $\Delta \simeq x_r \int_{-\infty}^{\infty} dv_{||} \tilde{D}^{ee} (j' - j'_M)$, где j'_M можно аппроксимировать функцией (2.87), а j_M — максвелловская функция. Тогда

$$\Delta \simeq \int_x^{\infty} d\lambda' j'_M \tilde{D}^{ee}(x, x'); \quad (2.95)$$

$$\langle D^{ei} \rangle \simeq \frac{v_{Te}^2}{2\tau_{ei}} \left\{ 1 + \frac{0,3x(J_0^1 + 8I_1^2)}{x_r J_0^1 + (\sqrt{\pi}/2) \exp(x_r^2/2) [1 - \Phi(x_r)]} \right\}^{-1}, \quad (2.96)$$

где

$$J_n^n = \int_0^1 \frac{dt t^{n+1/2} \exp\{-x^2 t/2\}}{(1+t)^{2+n}}. \quad (2.97)$$

Теперь находим:

$$j = \frac{D_{||}^{QL}}{D_{||}^{QL} + D^c} \alpha(x, Z_i) j_r; \quad (2.98)$$

$$p = \frac{D^c D_{||}^{QL}}{D_{||}^{QL} + D^c} \frac{\sqrt{2} m_e x}{e v_{Te}} J_r. \quad (2.99)$$

Здесь выполнено преобразование $x_r \rightarrow x \equiv \sqrt{2}v_{||}/v_{Te}$, $D^c \equiv D^c(x, Z_i)$, j_r — плотность тока резонансных электронов, равная

$$j_r = en_r v_{\Phi} = en_e v_{Te} \Delta x \frac{\exp\{-x^2/2\}}{2\sqrt{\pi}}, \quad (2.100)$$

а функция $\alpha(x, Z_i)$ определяет вклад в ток искажения распределения электронов вне резонансной области и дается выражением

$$\alpha(x, Z_i) = 1 + D^{ee} / \langle D^{ei} \rangle. \quad (2.101)$$

При $Z_i = 1$ эта функция изображена на рис. 2.8, из которого видно, что нерезонансные искажения существенны в области относительно невысоких фазовых скоростей волн, $x \ll 2$, где они приводят к возрастанию тока приблизительно в 2 раза.

Говоря о нерезонансных частицах, следует сказать, что их роль зависит от амплитуд возбужденных волн. Если представить ток в виде тока резонансных и нерезонансных частиц, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_r + \mathbf{j}_n$, то при $D^c \ll D^{QL}$ токи \mathbf{j}_r и \mathbf{j}_n протекают в одну и ту же сторону и при $x \ll 2$ приблизительно равны (напомним, что ток j_r включает ток частиц с максвелловским распределением); в противоположном предельном случае, $D^c \gg D^{QL}$, токи направлены в разные стороны и в значительной степени компенсируют друг друга.

Отметим, что в ряде работ (см., например, [94, 95]) для нахождения тока в плазме использовалось гидродинамическое выражение для силы электрон-ионного трения (R_{ei}). Сравним его с выражением для R_{ei} , которое следует из кинетического рассмотрения. С помощью соотношений (2.98), (2.99) находим:

$$R_{ei} = - \frac{m_e n_e (V_e - V_i)}{\tau_{ei}} K, \quad (2.102)$$

где $K = D^c [1 + D^{ee} / \langle D^{ei} \rangle]^{-1}$. Зависимость $K(x)$ приведена на рис. 2.9. Из этого рисунка видно, что гидродинамическое приближение дает качественно правильную картину при $x \ll 1$. Но оно становится неприменимым в области $x \gg 1$, где сила трения значительно меньше гидродинамической. Последнее обстоятельство играет благоприятную роль при поддержании тока волнами с $v_\phi \gg v_e$ [20, 96, 97].

Полученные выражения для j и p позволяют найти локальную эффективность генерации тока:

$$\eta \equiv \frac{j}{p} = \frac{|e| \tau_{ee}}{\sqrt{\pi} m_e v_{Te}} \tilde{\eta}(x, Z_i), \quad (2.103)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\sqrt{\pi/2} \alpha(x, Z_i)}{x D^c \tau_{ee} / v_{Te}^2}; \quad (2.104)$$

где

$$D^c = \frac{v_{Te}^2}{2\tau_{ee}} \left\{ \pi (1 + x^2) \left[Z_i + 1 + \Phi \left(\frac{|x|}{\sqrt{2}} \right) \right] \left[1 - \Phi \left(\frac{|x|}{\sqrt{2}} \right) \right] e^{x^2/2} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\pi} x \left[Z_i + 2\Phi \left(\frac{|x|}{\sqrt{2}} \right) \right] - 2e^{-x^2/2} \right\}. \quad (2.105)$$

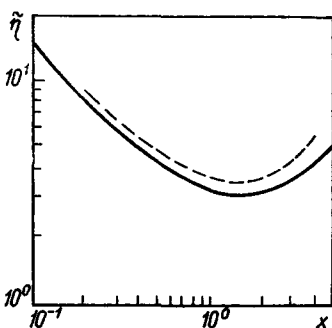
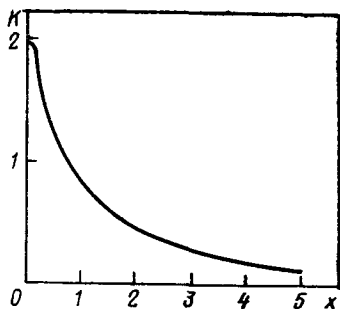


Рис. 2.9. Множитель $K(x)$ в выражении для силы трения; $x = \sqrt{2}v_\phi/v_{Te}$

Рис. 2.10. Эффективность генерации тока $\tilde{\eta}$ бегущими волнами при $Z_i=1$ в режиме слабых столкновений, полученная в одномерной [89] и квазиодномерной теории [103] (непрерывная кривая) и результаты двумерных численных расчетов [98] (пунктирная кривая); $x = \sqrt{2}v_\phi/v_{Te}$

В частности, при $x \gg 1$

$$D^c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{Te}^2}{\tau_{ee}} \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{6}{x^2} + \frac{45}{x^4} - \frac{210}{x^6} \right) (Z_i + 2). \quad (2.106)$$

Приведенная здесь теория дает качественно правильную картину зависимости тока и поглощаемой ВЧ-мощности от параметров плазмы и фазовых скоростей волн. Более того, ниже (в этом и следующем подразделах) мы увидим, что она согласуется количественно с более строгим рассмотрением, но лишь в случае режима слабых столкновений, $D^c \ll D^{QL}$ (в котором распределение частиц по скоростям почти «платизуется» в резонансной области, т. е. $\partial j/\partial v_\parallel \approx 0$). Поэтому при $D^c \ll D^{QL}$ имеет смысл представить найденные выражения для тока и эффективности его генерации в виде, удобном для практического использования:

$$j = 4,24 \cdot 10^8 n_{20} T^{1/2} (\Delta v_\phi/v_\phi) \psi(x, Z_i); \quad (2.107)$$

$$\eta = \frac{0,77T}{n_{20}\Lambda^{ei}} \tilde{\eta}(x, Z_i). \quad (2.108)$$

Здесь $n_{20} \equiv n/10^{20}$; n — в м³; T — в кэВ; η — в А·м/Вт; Λ^{ei} — кулоновский логарифм;

$$\psi(x, Z_i) = \frac{x^2}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} a(x, Z_i). \quad (2.109)$$

Зависимость $\tilde{\eta}$ от x при $Z_i=1$ дана на рис. 2.10. На этом же рисунке представлены результаты двумерных численных расчетов, выполненных в [98] для режима редких соударений при $\Delta x/x=0,1$. Как видим, изложенная здесь одномерная теория [89] хорошо согласуется с результатами численных расчетов при $x < 2$ и несколь-

ко хуже — при $x > 3$, но расхождение не превышает 25%. [Отметим, что одномерная теория [90—93] значительно хуже согласуется с [98], а именно расхождение больше в $\alpha(x, Z_i)$ раз]. Ухудшение согласия в области высоких значений фазовой скорости можно объяснить нарушением условия применимости теории ($\Delta x \ll 1$) при $x > 3$, где $\Delta x > 0,3$, а также некоторой неопределенностью представленных в [98] на рис. 1 результатов, где точки на оси абсцисс характеризуют фазовую скорость волн с точностью до $\Delta v_\phi = 0,1 v_\phi$, т. е. с низкой точностью при больших x .

В предельных случаях малых и больших фазовых скоростей волн функции $\tilde{\eta}(x, Z_i)$ и $\alpha(x, Z_i)$ допускают простую аппроксимацию.

При $x \leq 0,3$ имеем:

$$\tilde{\eta}(x, Z_i) = \frac{0,8(Z_i + 1,2)}{Z_i(1 - 1,6x) + 0,36} \frac{1}{Z_i x}; \quad (2.110)$$

$$\alpha(x, Z_i) = 1 + 1,2Z_i^{-1}. \quad (2.111)$$

При $x \geq 5$

$$\tilde{\eta}(x, Z_i) = x^2 / [2(1 - 6/x^2)(Z_i + 2)], \quad \alpha(x, Z_i) \simeq 1. \quad (2.112)$$

Следует отметить сильную зависимость от Z_i (более сильную, чем Z_i^{-1}) эффективности генерации тока волнами с $x \ll 1$.

Для нахождения глобальной эффективности генерации тока, I/P , где I — полный ток в плазме; P — вводимая мощность, необходимо знание радиальных распределений $j(r)$ и $p(r)$. В частности, для подобных распределений $j(r)/j(0) = p(r)/p(0)$:

$$I/P = j(0) / (2\pi R_0 p(0)). \quad (2.113)$$

В рассматриваемом случае использования волн с $\omega \ll \omega_{ce}$ единственным механизмом возмущения функции распределения по поперечным скоростям являются кулоновские столкновения. Этим объясняется тот факт, что предположение $f(v_\perp) = f_M(v_\perp)$ более всего оправдано в режиме с $D^c \ll D^{QL}$. Обратное, можно утверждать, что режим редких столкновений — это такой режим, в котором возмущения в поперечных к магнитному полю направлениях дают пренебрежимо малый вклад в ток и мощность. Если принять сказанное во внимание, то можно получить эффективность поддержания тока при $D^c \ll D^{QL}$, рассматривая динамику ансамбля пробных частиц, методом, изложенным в обзоре [6] для режима сильных столкновений ($D^c \gg D^{QL}$).

Произведем вывод $\eta(x, Z_i)$ для $x \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим две близкие точки пространства скоростей, v_1 и v_2 , которые различаются значениями продольной скорости. Предположим, что за счет ввода стационарной мощности p , начиная с некоторого момента, группа электронов систематически перебрасывается из точки v_1 в точку v_2 . Очевидно, что количество электронов, перебрасываемых в единицу времени, есть $p/(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)$, где $\mathcal{E} = mv^2/2$, а

ток дается выражением

$$j = \int_{-\infty}^t dt_0 \frac{ep}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} | v_{\parallel 2}(t - t_0) - v_{\parallel 1}(t - t_0) \simeq \simeq \frac{ep}{m_e} \frac{(\partial/\partial v_{\parallel}) \int_0^{\infty} v_{\parallel}(t) dt}{v_{\phi}}, \quad (2.114)$$

где $v_{1,2}(t=t_0) = v_{1,2}$. Для вычисления интеграла в (2.114) используем уравнение, которое описывает изменение продольной скорости ансамбля пробных частиц с $v \gg v_{Te}$:

$$dv_{\parallel}/dt = -v_s v_{\parallel}, \quad (2.115)$$

где

$$v_s = \frac{\sqrt{\pi}(Z_i + 2)}{\tau_{ee}} \frac{v_{Te}}{v^3}.$$

Изменением скоростей частиц в поперечном направлении, согласно сказанному выше, будем пренебрегать (в отличие от режима сильных столкновений [6]). Тогда получим:

$$\int_0^{\infty} v_{\parallel} dt = \int_{v_{\parallel} \ll v_{\phi}}^{v_{\phi}} \frac{dv_{\parallel}}{v_s} = \frac{1}{v_s(v_{\phi}) v_{\phi}^3} \int_{v_{\parallel} \ll v_{\phi}}^{v_{\phi}} dv_{\parallel} v_{\parallel}^3 = \frac{v_{\phi}}{4v_s(v_{\phi})}. \quad (2.116)$$

Подстановка (2.116) в (2.114) позволяет получить выражение для η , которое совпадает с (2.112) в пределе $x \rightarrow \infty$.

2.3.2. Квазиодномерная теория поддержания тока пакетом волн. Плотность тока j и эффективность j/p в режиме сильных столкновений. Чтобы получить одномерное уравнение для функции распределения электронов, выше мы производили интегрирование кинетического уравнения по поперечным скоростям. Это, вообще говоря, некорректный метод решения уравнения. Поэтому, чтобы понять, насколько полученные результаты адекватны действительности, необходимо дополнительное рассмотрение.

Снова обратимся к уравнению (2.77). Как и ранее, в качестве S^{col} используем оператор Ландау, с той разницей, что рассеивающую функцию в нем будем считать максвелловской. Решение уравнения будем искать в виде [99]

$$f_e(v) = f_M(v_{\perp}) f_1(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad (2.117)$$

где $f_1(v_{\parallel}, v_{\perp})$ — функция, слабо зависящая от v_{\perp} , т. е. $v_{Te}^2 \partial \ln f_1 / \partial v_{\perp}^2 \ll 1$. Тогда, проинтегрировав (2.77) по продольным скоростям от $-\infty$ до v_{\parallel} , придем к уравнению

$$D^{QL} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} + D_{11}^c \left(\frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} + \frac{2v_{\parallel}}{v_{Te}^2} f_e \right) +$$

$$+ \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \int_{v_1}^{v_2} D_{21}^c \left(\frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} + \frac{2v_{\parallel}}{v_{Te}^2} f_e \right) dv_{\parallel}. \quad (2.118)$$

Здесь D^{QL} — коэффициент квазилинейной диффузии, равный [18]

$$D^{QL} = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}|^2}{v_{\parallel}^2} |E_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}), \quad (2.119)$$

где $\mathbf{Q} = \{0, -ik_{\perp} v_{\perp} / (2|\omega_{pe}|), v_{\parallel}\}$; $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ — вектор поляризации волн.

Это выражение предполагает, что частота волн и волновые числа удовлетворяют условиям

$$\omega \ll \omega_{pe}, \quad k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{pe} \ll 1. \quad (2.120)$$

Для достаточно узкого волнового пакета его можно преобразовать к виду

$$D^{QL} = D_0^{QL} \left| 1 - \frac{i \bar{k}_{\perp} v_{\perp}^2}{2|\omega_{pe}| v_{\phi}} \frac{e_{\mathbf{k}y}}{e_{\mathbf{k}z}} \right|^2, \quad (2.121)$$

где

$$D_0^{QL} = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \frac{1}{v_{\phi} \Delta k_{\parallel}} \langle E_z^2 \rangle |k_{\parallel}| = \omega / v_{\phi}; \quad (2.122)$$

$\langle E_z^2 \rangle$ — усредненное по пространству координат значение E_z^2 ; \bar{k}_{\perp} — характерное значение поперечного волнового вектора; Δk_{\parallel} — разброс по продольным волновым числам. Коэффициенты столкновительной диффузии D_{11}^c и D_{21}^c даются выражениями:

$$D_{11}^c = \frac{v_{\perp}^2 v_{Te}^2}{2v^3} \left[\frac{V\sqrt{\pi}}{\tau_{ei}} \frac{v_{Te}}{v} + \frac{\varphi_1}{\tau_{ee}} \right] + \frac{v^2 v_{Te}^2}{2v^2} \frac{\varphi_2}{\tau_{ee}}, \quad (2.123)$$

$$D_{21}^c = \frac{v_{\perp} v_{\perp} v_{Te}^2}{2v^2} \left[-\frac{V\sqrt{\pi}}{\tau_{ei}} \frac{v_{Te}}{v} - \frac{\varphi_1}{\tau_{ee}} + \frac{\varphi_2}{\tau_{ee}} \right], \quad (2.124)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^1 \frac{dt}{Vt} (1-t) \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_{Te}^2} t \right\}; \\ \varphi_2 &= 2 \int_0^1 dt Vt \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_{Te}^2} t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Слагасное в уравнении (2.118), которое имеет вид дивергенции по поперечным скоростям, содержит малый параметр $\Delta v_r / v_{Te}$, где Δv_r — ширина резонансной области. Кроме того, поскольку

$D_{21}^c \sim v_\phi$, в случае волн с малыми фазовыми скоростями есть еще один малый параметр v_ϕ/v_{Te} . Поэтому при $v_\phi \ll v_{Te}$ указанное слагаемое вносит малый вклад и им можно пренебречь. Для волн с $v_\phi \gg v_{Te}$ такое пренебрежение оправдано лишь при достаточно узком спектре волн и обеспечивает меньшую точность расчетов. Мы будем считать, что выполнены условия, которые позволяют отбросить в (2.118) интегральное слагаемое. В этом приближении решение уравнения (2.118) легко найти:

$$f_e(\mathbf{v}) = f_0 \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_{Te}^2} + \frac{2}{v_{Te}^2} \int_0^v dv_\parallel v_\parallel \frac{D^{QL}}{D^{QL} + D_v^c} \right\}, \quad (2.126)$$

где $D_v^c = D_{11}^c(v_\perp, v_\parallel)$. Полученное выражение напоминает выражение (2.87), однако в последнем коэффициенты диффузии проинтегрированы по поперечным скоростям. Решение (2.126) согласуется со сделанным предположением о близости распределения по v_\perp к максвелловскому при выполнении хотя бы одного из условий: $D^{QL} \ll D^c$, $D^{QL} \gg D^c$, $v_\phi \ll v_{Te}$, $\Delta v_\phi/v_{Te} \ll 1$. Причем в случае режима редких столкновений ($D^{QL} \gg D^c$) часть функции распределения (2.126), связанная с присутствием волн, зависит преимущественно от v_\parallel , что и оправдывает представление $f_e(\mathbf{v})$ в виде $f_M(v_\perp) f_1(v_\parallel)$ в этом режиме, а выражение (2.126) практически совпадает с (2.87).

С помощью (2.126) находим ток и поглощаемую мощность:

$$j = \pi e \int_{v_1}^{v_2} dv_\parallel v_\parallel \int_0^\infty dv_\perp^2 j_{Me} \frac{D^{QL}}{D^{QL} + D_v^c}; \quad (2.127)$$

$$p = \frac{2\pi m_e}{v_e^2} \int_{v_1}^{v_2} dv_\parallel v_\parallel^2 \int_0^\infty dv_\perp^2 j_{Me} \frac{D^{QL} D_v^c}{D^{QL} + D_v^c}, \quad (2.128)$$

где $j_{Me} = [m_e/(2\pi T_e)]^{3/2} n_e \exp(-v^2/v_{Te}^2)$.

Выражение для мощности (2.128) переходит в выражение (2.99) в предельных случаях $D^{QL} \gg D_v^c$ и $D^{QL} \ll D_v^c$. Что же касается тока (2.127), то он совпадает с током одномерной теории только в режиме редких столкновений $D^{QL} \gg D_v^c$ [разумеется, в (2.98) при сравнении следует полагать $\alpha(x, Z_i) = 1$, поскольку (2.127) получено в предположении о максвелловском распределении рассеивающей функции в C^{col}].

Итак, одномерная теория правильно описывает ток и эффективность его генерации, если реализуется режим редких частот столкновений.

Применим выражения (2.127), (2.128) для изучения эффективности генерации тока в режиме сильных столкновений. Нетрудно

видеть, что в этом режиме

$$\tilde{\eta}(x, Z_i) = \frac{\sqrt{\pi} v_{Te}^3}{2^{\tau_{ee}} v_{\Phi}} \frac{\int d v_{\perp} f_M(v_{\perp}) \left| 1 - \frac{i k_{\perp} v_{\perp}}{2 |\omega_{Be}| v_{\Phi}} \frac{e_{ky}}{e_{kz}} \right|^2}{\int d v_{\perp} f_M(v_{\perp}) \left| 1 - \frac{i k_{\perp} v_{\perp}^2}{2 |\omega_{Be}| v_{\Phi}} \frac{e_{ky}}{e_{ky}} \right|^2} / D_v; \quad (2.129)$$

$$\psi(x, Z_i) = \alpha(x, Z_i) \frac{x^2 v_{Te}^2}{\sqrt{2\pi} 4^{\tau_{ee}}} e^{-x^2/2} \int d v_{\perp} f_M(v_{\perp}) \left| 1 - \frac{i k_{\perp} v_{\perp}^2}{2 |\omega_{Pe}| v_{\Phi}} \frac{e_{ky}}{e_{kz}} \right|^2 / D_v^c; \quad (2.130)$$

Здесь $\tilde{\eta}(x, Z_i)$ — нормированная согласно (2.103), (2.108) эффективность генерации тока, а $\psi(x, Z_i)$ связана с током соотношением

$$j = 4,24 \cdot 10^8 n_{20} T^{1/2} \frac{\Delta v_{\Phi}}{v_{\Phi}} \frac{D_0^{QL}}{D_0^c} \psi, \quad (2.131)$$

где $D_0^c = v_{Te}^2 / (2^{\tau_{ee}})$, j — в А/м², T — в кэВ.

Множитель $\alpha(x, Z_i)$, определяемый выражением (2.101) [см. также (2.111), (2.112) и рис. 2.8], добавлен в (2.129), (2.130), чтобы учесть искажение распределения электронов вне резонансной области. Отметим, что отношение D_0^{QL}/D_0^c , входящее в (2.131), является малым, в особенности при возбуждении волн с $v_{\Phi} \gg v_{Te}$, когда $D^c \ll D_0^c$ [см. (2.106)].

Для вычисления интегралов в (2.129), (2.130) требуется конкретизировать тип волны. Рассмотрим нижнегибридные, альфвеновские и магнитозвуковые волны. Их векторы поляризации даются соответственно следующими выражениями [18]:

$$\left. \begin{aligned} e_{\mathbf{k}}^{LH} &= \{k_{\perp}/k, 0, k_{\parallel}/k\}; \\ e_{\mathbf{k}}^A &= \left\{ 1, -\frac{i \omega}{\omega_{Bi}} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}, -\frac{v_{Te}^2}{2v_A} \frac{\omega^2}{|\omega_{Be}| |\omega_{Bi}|} \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k^2} \right\}; \\ e_{\mathbf{k}}^M &= \left\{ -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}, 1, -i \frac{v_{Te}^2}{2v_A^2} \frac{\omega}{|\omega_{Pe}|} \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

Если пренебречь зависимостью D^{QL} от v_{\perp} , что оправдано для нижнегибридных и альфвеновских волн с $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$, то интегралы в (2.129), (2.130) можно вычислить аналитическим путем. В результате в случае нижнегибридных волн будем иметь:

$$\tilde{\eta}(x, Z_i) = x^2 \beta^3 e^{\beta} E_1(\beta) \frac{\alpha(x, Z_i)}{2}; \quad (2.133)$$

$$\psi(x, Z_i) = x^5 e^{-x^2/2} \beta e^{\beta} E_1(\beta) \frac{\alpha(x, Z_i)}{8\pi}, \quad (2.134)$$

где $\beta = (Z_i + 1)^{-1}$; $E_1 = \int_{\beta}^{\infty} e^{-u} du/u$ — экспоненциальная интегральная функция. При всех разумных значениях Z_i эти выражения можно аппроксимировать следующим образом [100]:

$$\tilde{\eta}(x, Z_i) = \frac{1,5}{Z_i + 5} x^2; \quad (2.135)$$

$$\psi(x, Z_i) = \frac{0,12}{Z_i + 5} x^5 e^{-x^2/2}. \quad (2.136)$$

Отметим, что асимптотика $\tilde{\eta} \sim x^2$ достаточно точна лишь при $x \geq 5$.

В случае альфвеновских волн безразмерная эффективность $\tilde{\eta}$ и ψ даются следующими приближенными выражениями [100]:

$$\tilde{\eta}(x, Z_i) = \frac{1,34(Z_i + 1,2)}{Z_i + 0,7} \frac{1}{Z_i x}; \quad (2.137)$$

$$\psi(x, Z_i) = \frac{0,1(Z_i + 1,2)}{Z_i + 0,7} \frac{x^2}{Z_i} e^{-x^2/2}. \quad (2.138)$$

Результаты численных расчетов зависимости $\tilde{\eta}$ и ψ от x при $Z_i=1$ для $D^{QL} \neq D^{QL}(v_{\perp})$ и для D^{QL} с зависимостью от v_{\perp} , соответствующей быстрой магнитозвуковой волне, представлены на рис. 2.11—2.13. Для сравнения на рис. 2.11 пунктирными линиями изображены результаты двумерных расчетов [101, 102]. Как видим, результаты квазиодномерной теории хорошо согласуются с двумерными расчетами в случае альфвеновской и нижнегибридных волн и несколько хуже — в случае быстрой магнитозвуковой волны.

Отметим относительно слабую чувствительность тока, генерируемого нижнегибридными волнами в рассматриваемом режиме $D^c \gg D^{QL}$, к присутствию примесей в плазме. Согласно (2.135), $\tilde{\eta} \sim 1/(Z_i + 5)$. Правда, результаты численных расчетов [101] свидетельствуют о несколько более сильной зависимости от Z_i . Однако такую же зависимость дает нахождение эффективности генерации тока путем рассмотрения ансамбля пробных частиц.

Для получения эффективности с помощью пробных частиц воспользуемся выражением (2.114). Чтобы вычислить интеграл в нем, уравнение (2.115) следует дополнить уравнением, которое учитывает распывание облака пробных частиц по поперечным скоростям:

$$dv^2/dt = -v_g v^2, \quad (2.139)$$

где

$$v_g = 2\sqrt{\pi} v_{Te} / (\tau_{ee} v^3); \quad \tau_{ee} = m_e^2 v_{Te}^3 / (4\sqrt{\pi} n_e e^4 \Lambda). \quad (2.140)$$

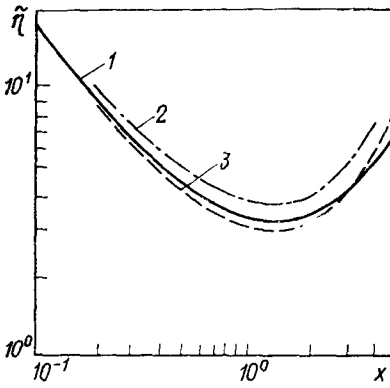


Рис. 2.11. Эффективность генерации тока $\eta(x)$ нижегибридными и альфвеновскими волнами при $Z_i=1$ в режиме сильных столкновений, полученная в квазиодномерной теории [100] (1) и в результате двумерных численных расчетов в [101] (2) и [102] (3): $x=\sqrt{2}v_\phi/v_{Te}$

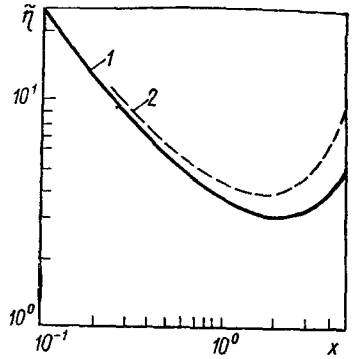


Рис. 2.12. Эффективность генерации тока $\eta(x)$ быстрыми магнитозвуковыми волнами в режиме сильных столкновений в квазиодномерной теории (1) и полученная в численных расчетах в [102] (2); $x=\sqrt{2}v_\phi/v_{Te}$

Тогда

$$\int_0^\infty v_{\parallel} dt = \frac{v_{\parallel}(t_0)}{v_g(v_1)} \frac{2}{Z_i + 5}. \quad (2.141)$$

С помощью (2.114), (2.141) найдем эффективность, которая отличается от эффективности (2.135) лишь числовым множителем, а именно превышает ее в 1,33 раза. Поскольку уравнением (2.139) учтена поперечная динамика частиц, можем заключить, что квазиодномерная теория дает при $x \rightarrow \infty$ заниженную на 25% эффективность генерации тока.

2.3.3. Поддержание тока волнами с широким спектром. Условие $\Delta v_\phi/v_{Te} \ll 1$, использованное выше, легко удовлетворяется при поддержании тока низкочастотными волнами. Но оно является

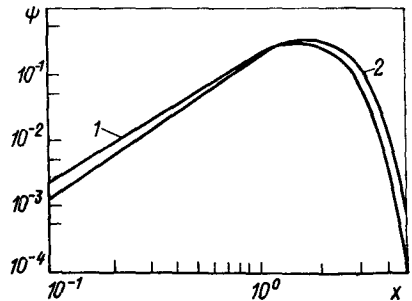


Рис. 2.13. Безразмерный ток $\psi(x)$ в режиме сильных столкновений:

1 — при возбуждении нижегибридных и альфвеновских волн, 2 — при возбуждении быстрых магнитозвуковых волн. Связь с размерным током дается выражением (2.131); $x = \sqrt{2}v_\phi/v_{Te}$

весьма жестким для волн с большими фазовыми скоростями и совсем невыполнимо в случае экспериментов по поддержанию тока нижегибридными волнами в токамаках с параметрами, далекими от термоядерных. Учитывая это, здесь мы рассмотрим поддерживание тока волнами с широким спектром ($\Delta x \equiv \Delta v_\phi / v_{Te} \geq 1$) и $v_\phi \gg v_{Te}$.

Предположим, что $D^{QL} \gg D^c$. Тогда при $\Delta x \ll 1$ справедлива одномерная теория, изложенная в п. 2.3.1. Обобщим эту теорию, отказавшись от ограничения $\Delta x \ll 1$.

Для нахождения поглощаемой ВЧ-мощности обратимся к выражению (2.90). Если подставить в него D^c , определяемое выражением (2.106), и использовать малость отношения D^c/D^{QL} , то после интегрирования будем иметь [103]:

$$p_w = p_{0w} \beta(x_1, x_2), \quad (2.142)$$

где

$$\beta(x_2, x_1) = 1 - \frac{3(1/x_1^2 - 1/x_2^2) - (45/4)(1/x_1^4 - 1/x_2^4) + 35(1/x_1^6 - 1/x_2^6)}{\ln(x_2/x_1)}, \quad (2.143)$$

индекс w означает, что рассматривается случай широкого спектра волн; x_1 и x_2 — границы интервала по фазовым скоростям волн (нормированным на $v_{Te}/\sqrt{2}$) p_{0w} — мощность, полученная при использовании огрубленной формулы для D^c ($D^c \sim x^{-3}$) и определяемая следующим выражением:

$$p_0^w = \frac{m_e v_{Te}^2 n_e}{\tau_{ee}} (Z_i + 2) \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{2} \right\} \ln \frac{x_2}{x_1}. \quad (2.144)$$

Выражение для плотности тока получим с помощью (2.86) [89]:

$$j_w = \alpha(x_1, Z_i) j_{0w}; \quad (2.145)$$

$$j_{0w} = \frac{en_e v_{Te}}{2\sqrt{\pi}} \Delta x \frac{x_2 + x_1}{2} \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{2} \right\}, \quad (2.146)$$

где j_{0w} — плотность тока, полученная без учета искажения функции распределения электронов вне резонансной области.

Отметим, что p_{0w} и j_{0w} — величины, найденные в одномерной теории [20, 90—93]; p_{0w} найдено также в [89].

С помощью (2.142)—(2.146) легко найти эффективность генерации тока:

$$\eta_w = \frac{e\tau_{ee}(x_2^2 - x_1^2)}{4\sqrt{\pi} m_e v_{Te} \ln(x_2/x_1)} \frac{\alpha(x_1, Z_i)}{\beta(x_1, x_2)[1 + (Z_i + 1)T_e/T_\perp]}, \quad (2.147)$$

где T_\perp — температура резонансных электронов [97].

Чтобы выяснить, несколько выражения (2.142) — (2.147) адекватны действительности, следует сравнить даваемые ими значения с теми, которые дают расчеты, основанные на численном решении двумерной задачи. Возьмем для примера $x_1=3$, $x_2=5$, $Z_i=1$. Тогда получим, что $\tilde{\eta}=10,3$. Численное интегрирование двумерного кинетического уравнения с учетом множителя $\alpha(x, Z_i)$ приводит к $\eta=6,55$ [97]. Отметим, что T_{\perp} в (2.147) бралось в виде [110]

$$\frac{T_{\perp}(Z_i=1)}{T_e} = \lambda_1^2 \frac{[(1 + \Delta x/x_1)^{7/3} - 1]/7 - \Delta x/(3x_1)}{1 + 2\Delta x/(3x_1) - (1 + \Delta x/x_1)^{1/3}}.$$

Перейдем к режиму сильных столкновений, $D^c \gg D^{QL}$. В этом режиме функция распределения слабо искажается ВЧ-полем. Поэтому при достаточно широком спектре волны количество частиц, взаимодействующих с волнами на правом краю резонансной области Δx , мало по сравнению с количеством резонансных частиц вблизи точки x_1 . Вследствие этого эффективность поддержания тока определяется преимущественно областью спектра с $x \simeq x_1$, что позволяет использовать для нахождения эффективности выражение, полученное для узкого спектра, в котором под x следует понимать x_1 . Двумерные численные расчеты для режима сильных столкновений выполнены в [120] при $\Delta x=1$. Они подтверждают сказанное, если учесть, что среднее значение для $\langle x^2 \rangle$, введенное в [120] посредством выражения

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x_1}^{x_2} dx \lambda^2 f_M(\lambda) \Big/ \int_{x_1}^{x_2} dx f_M(\lambda), \quad (2.148)$$

для широкого спектра есть не что иное, как x_1^2 .

2.3.4. Поддержание тока монохроматической волной. Известно, что из-за дискретности волновых чисел волны в плазме, возбуждаемые внешними источниками ВЧ-поля, в ряде случаев следует рассматривать в качестве монохроматических. Рассмотрим генерацию тока такими волнами.

Полагая выполненным условие (2.120), запишем следующее уравнение для функции распределения ведущих центров частиц:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{e_e}{m_e} \left(E_z - \frac{i k_{\perp} v_{\perp}^2}{2\omega_B v_{\parallel}} E_y \right) \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} = C^{\text{col}}(F). \quad (2.149)$$

Волновое слагаемое в (2.49) представим в виде $\frac{e_e}{m_e} E_{\parallel}^{\text{ef}} \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}}$, где $E_{\parallel}^{\text{ef}} = \hat{E} | b | \sin(k_{\perp} x + k_{\parallel} z - \omega t + \beta)$ — эффективное продольное электрическое поле; $b = \mathbf{e}_{kz} - i [v_{\perp}/(2v_{\parallel}) \mathbf{e}_{ky}]$; $\beta = \arcsin(\text{Re } b/|b|)$. Введем потенциал Φ посредством выражения $E_{\parallel}^{\text{ef}} = -\partial\Phi/\partial z$, где $\Phi = \Phi_0 \sin^2[(\beta + k_{\perp} x' + k_{\parallel} z - \omega t)/2]$; $\Phi = -2\hat{E} | b | / k_{\parallel}$. Далее пе-

рейдём к движущейся системе координат путем замены переменных $\zeta = k_{\perp} x' + k_{\parallel} z - \omega t + \beta$, $t' = t$. Тогда в стационарном режиме ($\partial/\partial t' = 0$) придём к следующему решению:

$$k_{\parallel} (v_{\parallel} - v_{\phi}) \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{e_e}{m_e} k_{\parallel} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} = C^{\text{col}}(F) \equiv \text{div } \mathbf{J}(F), \quad (2.150)$$

где $\mathbf{J}(F)$ — поток частиц в пространстве скоростей, обусловленный столкновениями.

Уравнение (2.150) является аналогом уравнения, на основе которого в [105] изучалось поглощение энергии плазменных волн. В отличие от уравнения (2.150) в [105] использовалась аппроксимация столкновительного члена, которая справедлива лишь при $v_{\phi} \gg v_{Te}$. Кроме того, в [105] рассеивающая функция в интеграле столкновений полагалась максвелловской.

Используя квазиодномерный подход, можно решить уравнение (2.150), после чего можно найти ток и поглощаемую мощность. Такие расчеты проделаны в [104] в предположении, что $\Delta v_c \ll v_{Te}$, $\tau_b^w \ll \tau_c^{\text{ef}}$, где $\Delta v_c = \sqrt{2e\Phi_0/m_e}$ — ширина области захваченных частиц; $\tau_b^w \sim (k_{\parallel} \Delta v_c)^{-1}$ — баунс-период частиц в поле волн; $\tau_c^{\text{ef}} \sim (\Delta v_c/v_{Te})^2 (1 + v_{\phi}/v_{Te})^3 \tau_{\text{col}}$. Они привели к следующим результатам:

$$j = e_e n_r v_{\phi} \alpha(x, Z_i); \quad (2.151)$$

$$\eta = \frac{|e| \tau_{ee}}{\sqrt{\pi} m_e v_{Te}} \tilde{\eta}(x, Z_i), \quad (2.152)$$

где $\alpha(x, Z_i)$ и $\tilde{\eta}(x, Z_i)$ определены выражениями (2.101) и (2.104) и представлены на рис. 2.8 и 2.10; n_r — концентрация резонансных электронов, равная

$$n_r = n_e \cdot 2G \Delta v_c \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{Te}} \exp(-v_{\phi}^2/v_{Te}^2), \quad (2.153)$$

$$G = \frac{2}{\pi} + \int_1^{\infty} d\kappa \left[\frac{2}{\pi} K(\kappa^{-1}) - \frac{\pi}{2E(\kappa^{-1})} \right] = 0,69, \quad (2.154)$$

где $K(\kappa^{-1})$ и $E(\kappa^{-1})$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Отметим, что в случае поддержания тока альфвеновскими волнами выражения (2.151), (2.152) переходят в соответствующие выражения работы [107], если последние домножить на $\alpha(x, Z_i)$ (в [107] при описании электронных столкновений рассеивающая функция в столкновительном члене полагалась максвелловской). Но они существенно отличаются от выражений, полученных в [108, 109], где $j \sim \Phi^{3/2}$, т. е. ток сильно занижен, что связано с пренебрежением токопереносом, осуществляемым электронами с $v_{\parallel} > v_{\phi} + \Delta v_c$.

С помощью (2.152), (2.103) заключаем, что эффективность генерации тока в плазме с помощью монохроматической волны равна эффективности генерации тока узким пакетом волн при условии $D^{QL} \gg D^c$, которое соответствует рассмотренному здесь режиму. Токи (2.151) и (2.98) также равны, если ширина спектра возбужденных волн Δv_r равна ширине области захвата частиц монохроматической волной, т. е. если $\Delta v_\phi = 2G\Delta v_c$.

2.3.5. Влияние тороидальности на токи ВЧ-увлечения. Предыдущее рассмотрение токов ВЧ-увлечения проведено в приближении прямого магнитного поля. Поэтому естественно возникает вопрос, как отразится учет реальной геометрии магнитного поля токамаков на полученных результатах? В особенности при поддержании тока в реакторе-токамаке, когда для плазмы характерен банановый режим.

Прежде всего важно выяснить возможность использования уравнений квазилинейной теории в приближении прямого магнитного поля для плазмы в банановом режиме.

Очевидно, силовые линии магнитного поля можно считать прямыми тогда, когда время искажения функции распределения электронов под воздействием поля волн мало по сравнению со временем, за которое электрон при движении по орбите проходит расстояние порядка характерного размера неоднородности магнитного поля. В случае генерации тока пакетом волн это условие есть: $\tau^{QL} \ll \tau_b$, где τ_b — период движения электрона по малому азимуту тора, $\tau^{QL} \sim (\Delta v_\phi)^2 / D^{QL}$. Используя для D^{QL} выражение (2.121), получаем оценку времени квазилинейной диффузии:

$$\tau^{QL} \sim N^3 / \omega_w, \quad (2.155)$$

где $\omega_w = k_{\parallel} \Delta v_c$ — частота осциллирующей частицы, захваченной полем волны; $\Delta v_c \sim v_{Te} \sqrt{e\tilde{E}_{\parallel} / (k_{\parallel} T_e)}$ в случае захвата частицы электрическим полем волны \tilde{E}_{\parallel} ; $\Delta v_c \sim v_{Te} \sqrt{B/B_0}$ при захвате магнитным полем; $N \sim \Delta v_\phi / \Delta v_c \gg 1$.

Теперь можем записать условие применимости приближения прямого магнитного поля в виде

$$1 \ll N \ll (k_{\parallel} q R_0 \Delta v_\phi / v_\phi)^{1/4}, \quad (2.156)$$

где q — коэффициент запаса токамака; R_0 — большой радиус тора. Это весьма жесткое условие. В частности, если Δv_c лишь незначительно шире «щелей» между резонансными значениями продольной скорости частицы, связанными с дискретностью спектра волн по k_{\parallel} , то (2.156) дает противоречие неравенства: $1 \ll N \ll 1$. Таким образом, приходим к необходимости учета тороидальности силовых линий магнитного поля.

С учетом тороидальности уравнения для функции распределения ларморовских центров электронов запишем в виде

$$(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_d) \cdot \nabla f_e = Q^{QL}(f_e) + C^{col}(f_e), \quad (2.157)$$

где v_d — скорость тороидального дрейфа; $Q^{QL}(f_e)$ — слагаемое, описывающее взаимодействие частиц с волнами. Отметим, что в [101, 111] слагаемое $Q^{QL}(f_e)$ бралось из квазилинейной теории для плазмы в однородном магнитном поле, тогда как тороидальность учитывалась путем удержания слагаемого $v_{||} \cdot \nabla f_e$. Примем во внимание сказанное выше относительно неравенств (2.156) и учтем неоднородность поля в $Q^{QL}(f_e)$. Для упрощения уравнения (2.157) введем малый параметр τ_b/τ_c (τ_c — характерное столкновительное время), а также будем полагать малым отношением τ_b/τ^{QL} . Это позволит представить функцию распределения в виде разложения по этим параметрам: $f_e = F^0 + f' + \dots$. Нетрудно видеть, что F^0 зависит лишь от интегралов движения частицы в тороидальном магнитном поле и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\langle Q^{QL}(F^0) \rangle + \langle C^{col}(F^0) \rangle = 0, \quad (2.158)$$

где $\langle \dots \rangle = \oint \frac{dt}{\tau_b}(\dots)$; интегрирование производится по орбитам ведущих центров частиц.

Квазилинейный член $\langle Q^{QL}(F^0) \rangle$ при специальных допущениях относительно волновых векторов и частот возбужденных волн вычислен в ряде работ; общее выражение для него получено в [112]. Для волн, которые удовлетворяют условиям (2.120), $\langle Q^{QL}(F^0) \rangle$ удобно записать следующим образом:

$$\langle Q^{QL}(F^0) \rangle = g^{-1} \frac{\partial}{\partial v_{||}} D^{QL} g \frac{\partial}{\partial v} F^0. \quad (2.159)$$

Здесь

$$D^{QL} = \frac{\pi e^2}{2m_e^2} \sum_{\mathbf{k}, s} |E_{\mathbf{k}}|^2 \frac{v_{\Phi}^2}{v_{||}^2} \left| e_{\mathbf{k}z} + \right. \\ \left. + i e_{\mathbf{k}y} \frac{k_{\perp} v_{\perp}^2}{2 |\omega_{Be} | v_{\Phi}} \right|^2 |I_{\mathbf{k}s}|^2 \delta(\omega - k_{||} \langle v_{||} \rangle - s\omega_b); \\ I_{\mathbf{k}s} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t dt' (k_{||} \langle v_{||} \rangle - k_{||} v_{||} + s\omega_b) \right\} \right\rangle; \quad (2.160)$$

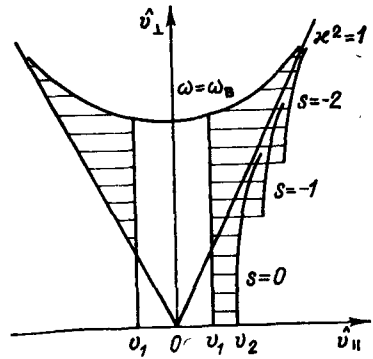
$g = K(\kappa^{-1})$ для пролетных частиц и $g = \kappa K(\kappa)$ — для запертых частиц; $K(\kappa)$ и $K(\kappa^{-1})$ — полные эллиптические интегралы первого рода; $\kappa^2 = \hat{v}_{||} / (2\varepsilon \hat{v}_{\perp}^2)$; $\varepsilon = r/R_0$; $\hat{v}_{||} = v_{||}(\theta=0)$; $\hat{v}_{\perp} = v_{\perp}(\theta=0)$; $\hat{v}_{\perp} = v_{\perp}(\theta = \pi/2)$; r и θ — радиальная и полоидальная координаты.

Начнем с рассмотрения пролетных частиц. Эти частицы взаимодействуют с волнами посредством резонансов

$$\omega - \left(k_{||} + \frac{s}{qR_0} \right) \hat{v}_{||} \frac{\pi}{2K(\kappa^{-1})} = 0.$$

Рис. 2.14. Область резонансного взаимодействия волн с частицами в режиме динамической стохастизации движения запертых частиц (заштрихована):

$v_{1,2}$ — границы резонансной области для сильно-пролетных частиц. Прямые $\kappa^2=1$ разделяют области существования пролетных и запертых частиц



Условия применимости квазилинейного уравнения требуют, чтобы резонансы взаимодействия волна-частица, соответствующие дискретным значениям волнового вектора k_{\parallel} , перекрывались. Но при $k_{\parallel} = \frac{(m-nq)}{(qR_0)}$ (m и n — полоидальные и тороидальные волновые числа) перекрытие резонансов по k_{\parallel} означает также перекрытие резонансов с различными s . Поэтому, строго говоря, с волнами взаимодействуют все частицы. Но эффективность взаимодействия различна для различных групп частиц. Так, при $\kappa \gg 1$ $I_{\mathbf{k}s}$ близко к нулю при $s \neq 0$. Благодаря этому основной вклад в квазилинейную диффузию дает гармоника $s = 0$, если только κ не слишком близко к единице. При $\kappa \rightarrow 1$ следует учитывать также гармоники с $s \neq 0$. Однако и в узкой области, соответствующей $\kappa \simeq 1$, существенны не все гармоники, а лишь гармоники с $s < 0$, поскольку в интеграл в $I_{\mathbf{k}s}$ главный вклад дает точка t_* , где $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}(t_*)$, т. е. где выполнено условие $\hat{v}_{\parallel} \geq v_{\phi}$. Характерный вид резонансной области для пролетных частиц представлен на рис. 2.14 ниже прямой $\hat{v}_{\perp}/\hat{v}_{\parallel} = \sqrt{2\varepsilon}$, которая разделяет пролетные и запертые частицы.

Таким образом, если спектр возбужденных волн является узким, то область в пространстве $\hat{v}_{\parallel}, \hat{v}_{\perp}$, соответствующая пролетным резонансным частицам, также является узкой ($\Delta v_r(\hat{v}_{\perp}) \ll v_r$). Это дает основания использовать квазиодномерное приближение. Вычисления дают следующее.

а) При $D^{\text{QL}} \gg D_v^c$, где $D_v^c \equiv D_{11}^c$, D_{11}^c определяется выражением (2.123), в котором следует заменить $v_{\parallel} \rightarrow \hat{v}_{\parallel}$, $v_{\perp}^2 \rightarrow (1-\varepsilon)^2 \hat{v}_{\perp}^2 \times \times E(\kappa^{-1})/K(\kappa^{-1})$; $E(\kappa^{-1})$ — полный эллиптический интеграл второго

рода:

$$\psi(x, Z_i) = \frac{\alpha(x, Z_i)x^4}{8\varepsilon\sqrt{2\pi}} \sum_s \frac{1}{(1+s/\lambda)^5} \int_0^1 d\kappa^{-2} \left[\frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\kappa^{-1}) \right]^4 \exp(-v^2/v_{Te}^2); \quad (2.161)$$

$$\rho_u(x, Z_i) = \frac{x^5}{16\pi\varepsilon} \sum_s \frac{1}{(1+s/\lambda)^6} \int_0^1 d\kappa^{-2} \left[\frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\kappa^{-1}) \right]^6 \frac{D_v^c}{D_0^c} \exp(-v^2/v_{Te}^2), \quad (2.162)$$

где

$$\lambda = k_{\parallel} qR_0; \quad v^2 = \frac{x^2 v_{Te}^2}{2(1+s/\lambda)^2} \left[\frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\kappa^{-1}) \right]^2 \left(1 + \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \kappa^{-2} \right). \quad (2.163)$$

Связь ψ с током j дается формулой (2.107), а ρ_u связано с мощностью p_u , поглощаемой пролетными электронами, посредством выражения

$$p_u = \sqrt{2\pi} \frac{m_e n_e v_{Te}^2}{\tau_{ee}} \frac{\Delta v_{\Phi}}{v_{\Phi}} \rho_u(x, Z_i). \quad (2.164)$$

б) В режиме $D^{QL} \ll D_v^c$ имеем:

$$\begin{aligned} \psi(x, Z_i) &= \frac{x^4}{8\varepsilon\sqrt{2\pi}} \sum_s \frac{1}{(1+s/\lambda)^2} \int_0^1 d\kappa^{-2} \left[\frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\kappa^{-1}) \right]^2 \times \\ &\times \frac{[1 - (\hat{v}_{\perp}^2/v_e^2) \delta_{Mw}]^2}{D^c/D_0^c} I_s^2 \exp(-v^2/v_{Te}^2); \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned} \rho_u(x, Z_i) &= \frac{x^5}{16\pi\varepsilon} \sum_s \frac{1}{(1+s/\lambda)^3} \int_0^1 d\kappa^{-2} \left[\frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\kappa^{-1}) \right]^4 \times \\ &\times \left[1 - \frac{\hat{v}_{\perp}^2}{v_{Te}^2} \delta_{Mw} \right]^2 I_s^2 \exp(-v^2/v_{Te}^2), \end{aligned} \quad (2.166)$$

где $\delta_{Mw}=1$ для быстрых магнитозвуковых волн; δ_{Mw} — для нижнегибридных и альфвеновских волн.

Ток j связан с $\psi(x, Z_i)$ соотношением (2.131), а мощность p_u с $\rho_u(x, Z_i)$ — выражением

$$p_u = \frac{\sqrt{2\pi} m_e n_e v_{Te}^2}{\tau_{ee}} \frac{\Delta v_{\Phi}}{v_{\Phi}} \rho_u(x, Z_i). \quad (2.167)$$

Перейдем к изучению роли запертых частиц. Условием резонанса волн с запертыми частицами является выполнение равенства $\omega = s\omega_b(\hat{v}_{\perp}, \hat{v}_{\parallel})$, что видно из уравнения (2.160). Это равен-

ство не зависит от волновых векторов возбужденных волн. Поэтому из него следует, что при монохроматическом по частоте генераторе ВЧ-поля резонансная область запертых частиц состоит из отдельных линий, т. е. площадь резонансной области оказывается равной нулю. А это обстоятельство приводит к выводу об отсутствии поглощения энергии волн запертыми частицами. Действительно, хотя для резонансных частиц $D^{QL} \rightarrow \infty$, $\langle Q^{QL}(F^0) \rangle$ является ограниченной функцией благодаря установлению плато на функции распределения резонансных частиц, что необходимо следует из уравнения (2.158). Поэтому интеграл, определяющий поглощение энергии $\int_{\Delta v_r} dv \frac{m_e v^2}{2} \langle Q^{QL} \rangle$ ($\Delta v_r \rightarrow 0$ — резонансная область запертых частиц), обращается в нуль.

Конечно, сделанный вывод перестанет быть справедливым, если учесть уширение баунс-резонансов, например, из-за конечных амплитуд волн. Соответствующая теория построена в работах [113, 114]. Согласно указанным работам, по характеру взаимодействия ВЧ-поля с запертыми частицами можно выделить три режима:

1) динамической стохастизации движения частиц, когда баунс-резонансы перекрываются благодаря выполнению условия

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{s\omega_e}{\lambda\omega_b} \right)^2 J_s(2\lambda\kappa) > 1, \quad (2.168)$$

где $\omega_b = 2\pi/\tau_b$; J_s — функция Бесселя;

2) слабых столкновений, когда выполнено условие

$$v_*\tau_b \ll \mathcal{K}^{3/2} \ll 1, \quad (2.169)$$

где $v_* = s^2 v_{col}/e$, v_{col} — частота столкновений;

3) промежуточных столкновений

$$\mathcal{K}^{3/2} \ll v_*\tau_b \ll 1. \quad (2.170)$$

Отметим, что критерий стохастизации (2.168), полученный аналитическим путем в [113, 114], подтвержден в численных расчетах работы [115].

В случае динамической стохастизации количество запертых частиц, взаимодействующих с волнами, является наибольшим. Поскольку запертые частицы, поглощая энергию волн, тока не переносят, то этот случай является наихудшим с точки зрения обеспечения наибольшей эффективности поддержания тока. Его мы и рассмотрим, имея в виду, что в действительности при поддержании тока волнами с $v_\phi \ll v_e$, для которых тороидальные эффекты наиболее существенны, эффективность будет не ниже полученной здесь и не выше найденной в приближении прямого магнитного поля.

В каждом из режимов (2.168) — (2.170) уравнение для функции распределения электронов, усредненной по баунс-орбитам, можно получить из уравнения (2.159) по определенному рецепту [113, 114]. При динамической стохастизации для этого следует перейти

от суммирования по s к интегрированию, которое легко выполнить с помощью $\delta(\omega - s\omega_b)$.

Отметим, что основной вклад в интеграл в I_{k_1} , как и в случае пролетных частиц, дает точка $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} (t_{*})$, поэтому с волнами взаимодействуют в основном частицы с $\hat{v}_{\parallel} \geq v_{\phi}$. Другое ограничение на область резонансного взаимодействия волн с запертыми частицами накладывает множитель $\eta(\omega - \omega_b)$: $\hat{v}_{\perp} \leq v_{\phi} \lambda \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \times \frac{2}{\pi} K(\kappa)$. Учитывая сказанное, резонансную область в пространстве скоростей можем изобразить в виде, представленном на рис. 2.14.

Поскольку резонансная область запертых частиц не является узкой, то подавляющее большинство взаимодействующих с волнами частиц характеризуется малым параметром запертости κ . Поэтому наибольшим является диффузионный коэффициент D_{11}^c который определяется выражением (2.123), если в последнем заменить $v_{\parallel} \rightarrow \hat{v}_{\parallel}$, $v_{\perp}^2/v^2 \rightarrow (1-\varepsilon)^2 (E(\kappa)/K(\kappa) - 1 + \kappa^2)/\kappa^2$. Это позволяет пренебречь в $\langle C^{(0)}(F^0) \rangle$ дивергенцией по поперечным скоростям и использовать, как и в случае пролетных частиц, квазиодномерный подход.

Тогда можно прийти к следующему выражению для мощности, поглощаемой запертыми частицами:

$$p_t = \frac{\pi m_e}{\varepsilon v_{Te}^2} \int_{x_0^2}^1 \frac{dx^2}{x^3} \frac{2}{\pi} K(\kappa) \int_{v_{\phi}^2}^{v_{\phi}^2 [2\lambda \frac{2}{\pi} K(\kappa)]^2} d\hat{v}_{\parallel}^2 \hat{v}_{\parallel}^3 \frac{D^{QL} D_v^c}{D^{QL} + D_v^c} F^0, \quad (2.171)$$

где κ_0 — решение уравнения $2\lambda \kappa_0 \frac{2}{\pi} K(\kappa_0) = 1$. В предельных случаях отсюда имеем:

а) при $D^{QL} \gg D_v^c$

$$p_t = \sqrt{2\pi} \frac{m_e n_e v_{Te}^2}{\tau_{ee}} \rho_t(x, Z_i), \quad (2.172)$$

где

$$\rho_t(x, Z_i) = \frac{x^5}{16\pi} \int_{x_0^2}^1 \frac{dx^2}{x^3} \frac{2}{\pi} K(\kappa) \int_1^{[2\lambda \frac{2}{\pi} K(\kappa)]^2} dy y^{3/2} \times \\ \times \frac{D^c}{D_0^c} \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_e^2} + x^2 (y - 1) \right\}; \quad (2.173)$$

$$v^2 = \frac{x^2 v_{Te}^2}{4\varepsilon x^2} y (1 - \varepsilon + 2\varepsilon x^2), \quad y = \frac{\hat{v}_{\parallel}^2}{v_{\phi}^2}; \quad (2.174)$$

б) при $D^{QL} \ll D^c$

$$\rho_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_e n_e v_{Te}^2}{\tau_{ee}} \frac{\Delta k_{\parallel}}{k_{\parallel}} \frac{D_0^{QL}}{D_0^c} \rho_t(x, Z_i), \quad (2.175)$$

где

$$\rho_t(x, Z_i) = \frac{x^5}{8\pi\epsilon} \lambda \int_{x_0^2}^1 \frac{dx^2}{x^3} \left[\frac{2}{\pi} K(x) \right]^2 \int_1^{\left[2\lambda x \frac{2}{\pi} K(x) \right]^2} dy \left[1 - \frac{\hat{v}_1^2}{v_{Te}^2} \delta_{Mxz} \right]^2 \times \\ \times I^2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{v_{Te}^2}\right), \quad I = \sum_{\mathbf{k}, s} I_{\mathbf{k}, s} \delta(\omega/\omega_b - 1). \quad (2.176)$$

Зная ток и мощность, поглощаемую пролетными и запертыми частицами, можно найти эффективность поддержания тока:

$$\tilde{\eta}(x, Z) = \begin{cases} \frac{\psi(x, Z_i)}{\rho_u(x, Z_i) + \frac{k_{\parallel}}{\Delta k_{\parallel}} \rho_t(x, Z_i)}, & D^{Q1} \gg D^c; \end{cases} \quad (2.177)$$

$$\tilde{\eta}(x, Z) = \begin{cases} \frac{\psi(x, Z_i)}{\rho_u(x, Z_i) + \rho_t}, & D^{QL} \ll D^c. \end{cases} \quad (2.178)$$

Здесь $\tilde{\eta}$ связано с эффективностью $\eta = j/p$ соотношением (2.108), причем $p = p_u + p_t$.

Отметим зависимость $\tilde{\eta}$ от отношения $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}$ в режиме сла-

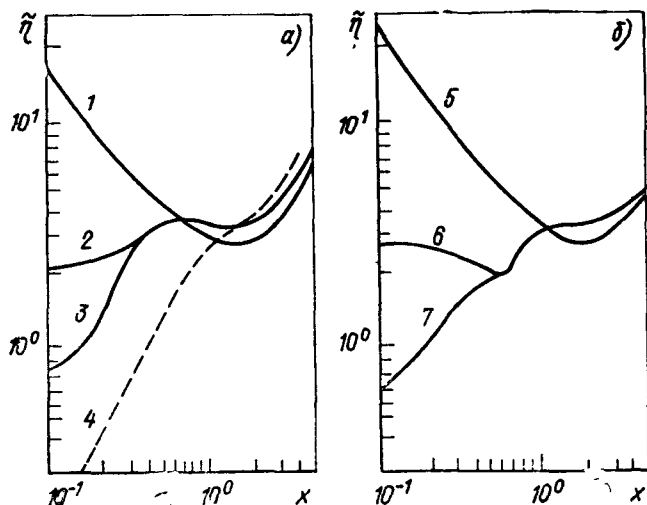


Рис. 2.15. Влияние тороидальности на эффективность генерации тока при $D^s \gg D^{QL}$ и $z_i=1$ нижнегибридными и альфвеновскими волнами (а) и быстрыми магнито-звуковыми волнами (б):

1, 5 — $\epsilon=0$, 2 — $\epsilon=0,1$, $\lambda=2$, 3 — $\epsilon=0,1$, $\lambda=10$; 4 — из [101] для $\epsilon=0,1$, 6 — $\epsilon=0,1$, $\lambda=2$; 7 — $\epsilon=0,1$, $\lambda=10$

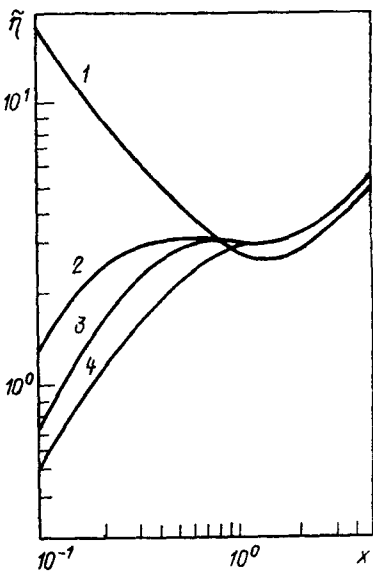


Рис. 2.16. Влияние тороидальности на эффективность генерации тока в режиме с $D^c \ll D^{QL}$;

1 — $\varepsilon=0$; 2 — $\varepsilon=0,1$; $\lambda=10$, $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}=0,3$; 3 — $\varepsilon=0,1$, $\lambda=2$; $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}=0,5$; 4 — $\varepsilon=0,1$, $\lambda=10$, $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}=0,1$

бых столкновений. Ее появление обусловлено тем, что при $D^{QL} \gg D^c$ ток и ρ_u пропорциональны ширине спектра возбужденных волн, тогда как ρ_t не зависит от спектра волн.

Результаты расчетов $\eta(x, Z_i)$ при $Z_i=1$ для альфвеновских и нижнегибридных волн представлены на рис. 2.15, 2.16. Для сравнения пунктирной кривой на рис. 2.15 представлены результаты работы [101], где использовался квазилинейный член в прибли-

жении прямого магнитного поля. Видно, что даже в наихудшем случае — случае динамической стохастизации — эффективность генерации тока альфвеновскими волнами превышает найденную в [101].

Мощность, поглощаемая запертыми частицами, зависит от λ , поскольку с ростом λ растет и количество взаимодействующих частиц (при $\kappa^2 \ll 1$, $s \ll \lambda$). Этим объясняется уменьшение эффективности при увеличении λ в режиме $D^{QL} \ll D^c$. В режиме с $D^{QL} \gg D^c$ важную роль играет ширина спектра волн. В этом режиме вклад запертых частиц в поглощаемую мощность тем меньше, чем больше $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}$. Так как при $\lambda \geq 1$ отношение $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}$ максимально, то η также максимально (см. рис. 2.16).

Таким образом, для минимизации роли тороидальных эффектов, которые важны при $v_{\phi} \ll v_{Te}$, следует обеспечить выполнение следующих условий: если $D^c \gg D^{QL}$, то $k_{\parallel} q R_0 \sim 1$; если $D^c \ll D^{QL}$, то $k_{\parallel} q R_0 \gg 1$, а $\Delta k_{\parallel}/k_{\parallel}$ не слишком мало. Есть и другой путь повышения эффективности генерации тока, который состоит в создании условий, при которых критерий стохастизации (2.168) не выполняется.

Мы рассмотрели вопрос о генерации тока в токамаках с плазмой в банановом режиме. Однако многие современные эксперименты ведутся с плазмой в режиме промежуточных частот столкновений (в режиме «плато»). Режим плато может реализоваться и в реакторных условиях, если пойти по пути создания установок с большим аспектным отношением и сильным магнитным полем [117]. Очевидно, в режиме плато эффективность η выше, чем в банановом режиме. Конкретные расчеты эффективности проведе-

ны в [118], где построена одномерная теория поддержания тока для случая режима плато. Они показали, что при $D^c \ll D^{QL}$ (когда теория наиболее адекватна действительности) эффективность в режиме плато практически совпадает с эффективностью в приближении прямого магнитного поля.

2.3.6. Сводка результатов. Генерируемый ток существенно зависит от соотношения между столкновительным и квазилинейным коэффициентами диффузии, т. е. зависит от отношения D^c/D^{QL} , где D^c дается выражением (2.123) [для оценок можно использовать (2.105)], а D^{QL} — (2.121), (2.122). Эффективность генерации тока менее чувствительна к этому отношению, в особенности если спектр волн узок.

В режиме редких частот столкновений ($D^c \ll D^{QL}$), когда функция распределения сильно искажается в резонансной области ($\partial j / \partial v_{\parallel} \approx 0$), с хорошей степенью точности справедливы результаты одномерной теории. В случае узкого спектра волн эти результаты, а также результаты двумерных численных расчетов, полученные в приближении однородного магнитного поля, представлены в (2.107) — (2.112) и на рис. 2.10. При возбуждении широкого спектра волн поглощаемая мощность, ток и эффективность даются выражениями (2.142) — (2.147). Эффективность генерации тока монохроматическими волнами равна эффективности генерации тока узким пакетом волн, а ток определяется (2.151). Если плазма находится в банановом режиме, то при использовании низкочастотных волн важную роль играют тороидальные эффекты. Поглощение энергии запертыми электронами наибольшее, а эффективность η наименьшая, если реализуется режим динамической стохастизации движения запертых частиц [условие (2.168)]. Результаты для этого случая даны выражениями (2.161) — (2.164), (2.172) — (2.177).

В режиме сильных столкновений ($D^c \gg D^{QL}$) функция распределения электронов в резонансной области остается близкой к максвелловской. Ток и эффективность зависят не только от отношения v_{ϕ}/v_{Te} , но и от поляризации волн. Для узкого спектра волн результаты представлены в (2.135) — (2.138), на рис. 2.11 — 2.13, а с учетом тороидальности — в (2.164) — (2.167), (2.175), (2.176), (2.178) и на рис. 2.15, 2.16. При возбуждении широкого спектра волн можно использовать выражение для эффективности (2.135), положив в нем $x = x_{\perp}$.

2.4. Создание тока циклотронными волнами

2.4.1. ЭЦ-волны. Рассмотрим сначала простейшую ситуацию однородного магнитного поля, такого, что $|\omega - n\omega_{Be}| \ll \omega_{Be}$. Если не учитывать релятивистских эффектов, то можно пренебречь изменением продольной энергии резонансных электронов и записать оператор квазилинейного взаимодействия в виде

$$Q_{ЭЦ}(f_e) = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} D_{ЭЦ}(v_{\parallel}, v_{\perp}) \frac{\partial f_e}{\partial v_{\perp}}. \quad (2.179)$$

Здесь $D_{\text{ЭЦ}}(v_{\parallel}, v_{\perp})$ — коэффициент диффузии резонансных электронов на ЭЦ-волнах, пропорциональный спектральной плотности энергии. В пределе малой ВЧ-мощности можно считать, что электронная функция распределения f_e близка к максвелловской f_{Me} , и при решении кинетического уравнения воспользоваться методом последовательных приближений:

$$f_e = f_{Me}(1 + h(v_{\perp}, v_{\parallel})), \quad (2.180)$$

где $|h| \ll 1$. Тогда стационарное кинетическое уравнение для определения поправки h к функции распределения принимает вид

$$C(f_{Me}h) + Q_{\text{ЭЦ}}(f_{Me}) = 0. \quad (2.181)$$

В гл. 1 было показано, что эффективность генерации тока ЭЦ-волнами увеличивается с ростом скорости резонансных электронов. Поэтому ограничимся рассмотрением предельного случая нагрева надтепловых электронов со скоростью $v \gg v_{Te}$. Наличие малого параметра $v_{Te}/v \ll 1$ позволяет существенно упростить оператор кулоновских столкновений; с точностью до членов (v_{Te}/v) он принимает вид

$$C(f_{Me}h) = \frac{4\pi e^4 n_e \Lambda}{m^2 v^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} \frac{f_{Me} T_e}{mv} \frac{\partial h}{\partial v} + f_{Me} \frac{1+z_i}{2v} \frac{\partial}{\partial \chi} (1-\chi^2) \frac{\partial h}{\partial \chi} \right], \quad (2.182)$$

где $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$; $\chi = v_{\parallel}/v$.

Для того чтобы найти плотность генерируемого тока

$$j_{\text{ЭЦ}} = -e \int d^3 v v_{\parallel} f_e = -e \int d^3 v v_{\parallel} f_{Me} h,$$

следует определить функцию $h(v, \chi)$. Для этого, в свою очередь, удобно разложить функцию $h(v, \chi)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$h(v, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(v) P_n(\chi). \quad (2.183)$$

Подставляя (2.183) в (2.181) и используя (2.182), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{v_0 v_{Te}^3}{v^2} \left\{ \frac{d}{dv} \left(\frac{v_{Te}^2}{2v} \frac{dh_n}{dv} + h_n \right) - \frac{1+z_i}{2v} n(n+1) h_n \right\} = -\Phi_n(v), \quad (2.184)$$

где

$$v_0 = 4\pi e^4 n_e \Lambda / (m^2 v_{Te}^2);$$

$$\Phi_n = \int_0^1 P_n(\chi) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} D_{\text{ЭЦ}}(v_{\parallel}, v_{\perp}) \frac{\partial f_{Me}}{\partial v_{\perp}} d\chi. \quad (2.185)$$

Чтобы найти плотность тока, достаточно определить функцию $h_1(v)$, поскольку $j_{\Sigma} = -(4\pi e/3) \int_0^{\infty} h_1 f_{Me} v^3 dv$. Для этого умножим уравнение (2.184) при $n=1$ на v^6 и проинтегрируем по v . В результате несложных преобразований получим:

$$v_0 v_{Te}^3 \left\{ 4v_{Te}^3 \int_0^{\infty} h_1 f_{Me} v dv - (5 + Z_i) \int_0^{\infty} h_1 f_{Me} v^3 dv \right\} = - \int_0^{\infty} \Phi_1(v) v^6 dv. \quad (2.186)$$

Поскольку мы рассматриваем случай $v \gg v_{Te}$, то в левой части (2.186) можно пренебречь первым слагаемым по сравнению со вторым (их отношение порядка $v_{Te}^2/v^2 \ll 1$). Отсюда сразу следует:

$$j_{\Sigma} = \frac{4\pi e}{3(5 + Z_i) v_0 v_{Te}^5} \int_0^{\infty} \Phi_1(v) v^6 dv. \quad (2.187)$$

Для дальнейшего упрощения результата (2.187) предположим, что коэффициент квазилинейной диффузии имеет вид

$$D_{\Sigma}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \begin{cases} D_0 & \text{при } v_{\perp} \leq v_{\parallel} \leq v_2, \\ 0 & \text{при } v_{\parallel} < 1 \text{ и } v_{\parallel} > v_2, \end{cases} \quad (2.188)$$

где $v_{\perp} \gg v_{Te}$. Нетрудно показать, что в рассматриваемом пределе малой поглощенной мощности плотность тока j_{Σ} (2.187) слабо зависит от правой границы спектра v_2 при $v_2 - v_{\parallel} \gg v_{Te}$. Теперь интеграл в (2.187) можно вычислить и найти j_{Σ} :

$$j_{\Sigma} = \frac{3en_e v_1 D_0}{v_0 (5 + Z_i) v_{Te}^2} \exp(-v_1^2/v_{Te}^2). \quad (2.189)$$

В этом же пределе удельная поглощенная мощность определяется выражением

$$p = \int \frac{mv^2}{2} Q_{\Sigma}(f_{Me}) d^3v = \frac{D_0 n_e m v_{Te}}{v_1} \exp(-v_1^2/v_{Te}^2). \quad (2.190)$$

Выражение для эффективности генерации тока с учетом (2.189) и (2.190) имеет вид

$$\eta_{\Sigma} = 3ev_1^2 [v_0 (5 + Z_i) m v_{Te}^3]^{-1}. \quad (2.191)$$

Сравнивая (2.191) с (2.135), видим, что эффективность η_{Σ} очень близка к эффективности генерации тока НГ-волнами:

$$\eta_{\Sigma} = (3/4) \eta_{НГ}. \quad (2.192)$$

Это обстоятельство было отмечено уже в самом начале исследований ЭЦ-метода генерации тока [15, 119, 120]. В п. 3.3.1 вернемся к обсуждению этого результата, а сейчас отметим только, что соотношение (2.192) справедливо лишь в пределе сильных столк-

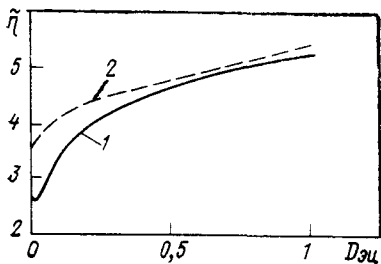


Рис. 2.17. Зависимость безразмерной эффективности $\tilde{\eta}_{ЭЦ} = \gamma v_0 m v_{Te} / e$ (1) и $\tilde{\eta}_{НГ}$ (2) от ВЧ-мощности

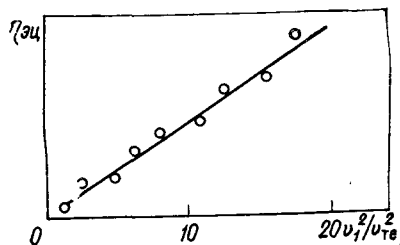


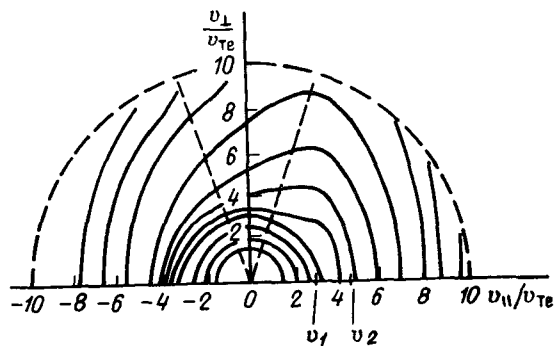
Рис. 2.18. Зависимость $\tilde{\eta}_{ЭЦ}$ от параметра v_1^2/v_{Te}^2 : — по формуле (2.182); ○ — результаты численных расчетов [120]

новений или малой ВЧ-мощности. При сильном квазилинейном взаимодействии проявляются качественные различия ЭЦ- и НГ-методов генерации тока.

Случай большой мощности численно исследован в [120—125]. В отличие от НГ-волн ЭЦ-волны приводят к диффузии резонансных электронов по v_{\perp} . Без учета релятивистских эффектов и конечности ларморовского радиуса такая диффузия не имеет насыщения, так что $\eta_{ЭЦ}$ должна расти с ростом $p_{ЭЦ}$. Теоретический анализ зависимости $\eta_{ЭЦ}(p_{ЭЦ})$ в пределе сильной квазилинейной диффузии проводился в [120, 125] с использованием численных методов. Его результаты (рис. 2.17, [125]) показывают, что с ростом $p_{ЭЦ}$ эффективность генерации тока ЭЦ-волнами сравнивается с $\eta_{НГ}$. На рис. 2.18 [120] результаты численных расчетов сравниваются с данными, полученными с помощью аналитической формулы (2.182) при малой вводимой ЭЦ-мощности. Отметим, что в большинстве численных расчетов, как и при аналитическом рассмотрении, брался линеаризованный оператор кулоновских столкновений. Поэтому полученные результаты также носят приближенный характер. Область их применимости ограничивается наиболее интересным для возможных приложений диапазоном надтепловых электронов $v_1 \gg v_{Te}$.

На рис. 2.19 для примера показаны линии уровня электронной функции распределения при $D_0/(v_0 v_{Te}^2) = 0,5$ и $v_1/v_{Te} = 2,8$, $v_2/v_{Te} = 3,5$. Видно, что квазилинейная диффузия существенно увеличивает количество электронов с большой поперечной энергией, причем роль этого эффекта возрастает с ростом $D_0/(v_0 v_{Te}^2)$. На этом же рисунке пунктиром показана граница перехода из пролетных в банановые частицы $v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2 \geq \epsilon^{-1/2}$ при $\epsilon = 0,1$. Из рисунка следует, что с ростом $D_0/(v_0 v_{Te}^2)$ увеличивается доля энергии ЭЦ-волны, поглощаемая запертыми электронами, не переносящими продольный ток. Поэтому для ЭЦ-волны анализ влияния тороидальных эффектов на эффективность генерации тока имеет прин-

Рис. 2.19. Линии уровня f_e при генерации тока ЭЦ-волнами



ципиальный характер. Первые исследования были проведены в пределе малой ЭЦ мощности. В [126] использовали приближение газа Лоренца в пренебрежении электрон-электронными столкновениями.

Дальнейшее продвижение в этой области связано с работами [127—129], где использовали метод функции Грина, описанный в гл. 3, а также [130], в которой учтены реальная геометрия токамака и конечность области локализации ЭЦ-волн. Результаты этих работ могут быть суммированы в виде графика зависимости эффективности генерации тока ЭЦ-волнами от v_1/v_{Te} при различных значениях параметра ϵ (пунктирные кривые на рис. 2.20 [128]). Как и следовало ожидать, учет тороидальных эффектов приводит к уменьшению величины $\eta_{ЭЦ}$, причем их роль снижается с ростом v_1/v_{Te} .

Еще отчетливей рассмотренный эффект проявляется в режимах с сильным квазилинейным взаимодействием. В [125] численно интегрировали кинетическое уравнение для электронов с линеаризованным интегралом кулоновских столкновений. Оператор квазилинейного взаимодействия выбирался в виде (2.179), (2.188). При интегрировании кинетического уравнения предполагали, что внутри конуса запертости $\theta \geq \pi/2 - \theta_0$, $\theta_0 = \sqrt{2}\epsilon$ происходит быстрая (с характерным временем $\tau_b \sim qR_0\sqrt{\epsilon}/v_{Te}$) симметризация электронной функции распределения. Такая модель при малом уровне $D_0 \ll v_0 v_{Te}^2$ дает значения $\eta_{ЭЦ}$, близкие к полученным в работе [128] (см. рис. 2.20, сплошные линии). С ростом D_0 и $\epsilon \neq 0$ происходит насыщение роста эффективности (рис. 2.21), так что при $\epsilon \geq 0,1$ $\eta_{ЭЦ}$ практически перестает зависеть от вводимой ВЧ-энергии и остается на уровне в несколько раз ниже соответствующей эффективности для НГ-волн. Для сравнения на рис. 2.21 пунктиром показана зависимость $\tilde{\eta}_{НГ}$ от v_1/v_{Te} с учетом тороидальности [125]. Такого падения эффективности в условиях реального эксперимента можно избежать, если выбором частоты волны добиться преимущественного поглощения ЭЦ-волн на внутреннем обводе тора, где характерная угловая ширина конуса захвата частиц в банановую область много меньше среднего по магнитной поверхности значения.

В заключение остановимся кратко на вопросе о влиянии релятивизма на эффективность генерации тока ЭЦ-волнами [131—133].

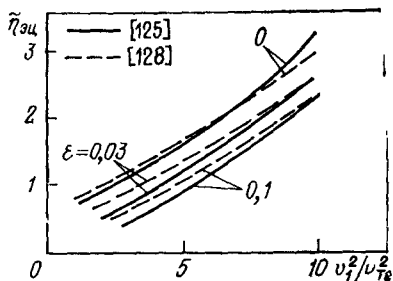


Рис. 2.20 Зависимость $\tilde{\eta}_{ЭЦ}$ от параметра v_1^2/v_{7e}^2 при малом уровне ВЧ-мощности

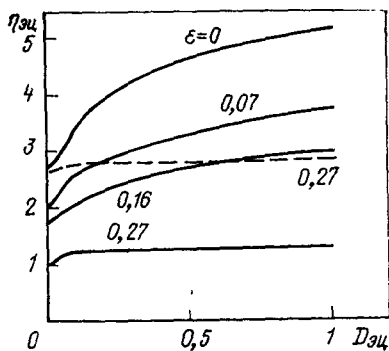


Рис. 2.21. Зависимость $\tilde{\eta}_{ЭЦ}$ от $D_{ЭЦ}$ с учетом тороидальности

Прежде всего отметим, что учет релятивизма приводит к перенормировке частоты столкновений быстрых электронов с основным компонентом плазмы. В пределе $p_{\parallel}/(mc) \gg 1$ она перестает зависеть от энергии частиц, вызывая соответствующее насыщение в зависимости эффективности генерации тока от отношения $p_{\parallel}/(mc)$ [132]. Еще сильнее модифицируется зависимость $\eta_{ЭЦ}(p_{ЭЦ})$ — увеличение вводимой мощности выше уровня, при котором резонансные электроны становятся релятивистскими, приводит к уменьшению эффективности генерации тока. И, наконец, для ЭЦ-волн учет релятивизма существен при определении области резонансного взаимодействия [133]. Так, в пределе слабого релятивизма условие доплеровского резонанса может быть записано как $v_{\parallel} \approx (\omega - \omega_{L0} + \omega_{B0} v^2/(2c^2))/k_{\parallel}$, где $\omega_{B0} = eB/(m_0c)$; m_0 — масса покоя электрона. Отсюда следует, что при учете релятивизма область резонансного взаимодействия искажается, что, в частности, может существенно влиять на процесс захвата частиц на банановые орбиты.

2.4.2. ИЦ-волны. Кажется естественным, что рассмотренный выше механизм генерации продольного тока из-за асимметрии по поперечному нагреву электронов должен иметь место и при нагреве ионного компонента. На качественном уровне этот процесс описан в [38] в приближении однородного магнитного поля. Учет тороидальных эффектов впервые произведен в [134]. В [135] предложена схема генерации тока при асимметричном нагреве α -частиц, рождающихся в термоядерной реакции. Детальный анализ эффективности генерации тока при ИЦ-нагреве плазмы проделан в [136].

Прежде всего отметим основные особенности генерации тока ИЦ-волнами. Анализ показывает, что оптимальной схемой генерации является асимметричный нагрев малой добавки ионов, для которой $\omega = \omega_{B\alpha}$. В силу того что плотность таких частиц достаточ-

но мала, не представляет труда нагреть их до высокой температуры, при которой частота ион-ионных столкновений достаточно мала, а эффективность $\eta_{\text{ИЦ}}$ высока. Так что в отличие от ЭЦ-волн характерную продольную скорость резонансных ионов $v_{\parallel p} = (\omega - \omega_{Bs})/k_{\parallel}$ можно выбрать $v_{\parallel p} \gg v_{Ti}$ (v_{Ti} — тепловая скорость основного ионного компонента).

Напомним, что плотность ЭЦ-тока согласно (2.189) $j_{\text{ЭЦ}} \sim \exp \times \times \{-v_1^2/v_{Te}^2\}$, и, чтобы получить значительную плотность тока, характерное значение $v_1 = [(\omega - \omega_{de})/k_{\parallel}]_{\text{min}}$ не должно намного превышать тепловую скорость. Кроме того, как и при создании тока пучком нейтралов, ИЦ-волны создают ионный ток, который в той или иной степени экранируется током электронов, учет которого необходим для получения правильного $\eta_{\text{ИЦ}}$.

Итак, будем считать, что на ионы сорта s с плотностью n_s , зарядом $Z_s e$ и массой M_s действуют ИЦ-волны, спектральная плотность энергии которых равномерно распределена в интервале $v_0 \leq v_{\parallel} \leq \infty$. Квазилинейный оператор взаимодействия таких волн с ионами имеет вид (2.179), причем

$$D_{\text{ИЦ}} = \begin{cases} D_0 & \text{при } v_{\parallel} \geq v_0, \\ 0 & \text{при } v_{\parallel} < v_0. \end{cases}$$

При выполнении неравенства $n_s \ll n_e$ можно не учитывать столкновений частиц добавки между собой. Будем также считать, что $v_{Te} > v_0 \gg v_{Ti}$ (индексом i обозначен основной компонент ионов). Эти неравенства позволяют упростить интегралы ион-ионных и ион-электронных столкновений и записать кинетическое уравнение для функции распределения ионов добавки в следующем виде [136]:

$$A \frac{\partial}{\partial v_3} \left[V_{\alpha 3} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\alpha}} + \frac{M_s}{M_i} \left(\frac{2v_3}{v^3} f_s + \frac{T_e}{M_s} \frac{3v_{\alpha} v_3 - v^2 \delta_{\alpha 3}}{v^5} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\alpha}} \right) \right] + B \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left(v_{\alpha} f_s + \frac{T_e}{M_s} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\alpha}} \right) + \frac{D_0}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \theta(v_{\parallel} - v_0) \frac{\partial f_s}{\partial v_{\perp}} = 0, \quad (2.193)$$

где $V_{\alpha 3} = (v^2 \delta_{\alpha 3} - v_{\alpha} v_3)/v^3$; $A = 2\pi e^4 Z_s^2 Z_i n_e \Lambda / M_s^2$;

$$B = 16 \sqrt{\pi} e^4 Z_s^2 n_e \Lambda / (3M_s m v_{Te}^3);$$

$$1/M = \sum_k n_{ik} Z_{ik}^2 / (M_{ik} n_e Z_i);$$

$$T_e = T_i; \quad \theta(v_{\parallel} - v_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } v_{\parallel} \geq v_0, \\ 0 & \text{при } v_{\parallel} < v_0. \end{cases}$$

При выводе (2.193) учтено также, что токовые скорости электронов и ионов u_e и u_i неравенства $n_s \ll n_e$ много меньше направленной скорости добавки.

Как и в случае ЭЦ-волн, аналитическое решение уравнений (2.193) можно получить в случае сильных столкновений $C^{\text{col}}(f_s) \geq Q_{\text{иц}}(f_s)$. При этом f_s можно представить в виде

$$f_s = f_{sM} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{sn}(v) P_n(\chi),$$

причем $f_{sM}(v) \gg f_n(v)$; $f_{sM} = n_s (V \sqrt{\pi v_{Ts}})^{-3} \exp(-v^2/v_{Ts}^2)$. В этом случае для нахождения плотности тока j_s и эффективности его генерации η_s достаточно ограничиться первым моментом от уравнения (2.193):

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} A \left\{ -\frac{f_{s1}}{v^3} + \frac{M_s}{M_i} \left[\frac{1}{v^2} \frac{df_{s1}}{dv} + \frac{1}{v^3} \frac{T_e}{M_s} \left(\frac{f_{s1}}{v^2} - \frac{1}{v} \frac{df_{s1}}{dv} + \frac{d^2 f_{s1}}{dv^2} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{2}{3} \frac{B}{v^2} \left[\frac{d}{dv} (v^3 f_{s1}) + \frac{T_e}{M_s} \left(\frac{d}{dv} v^2 \frac{df_{s1}}{dv} - 2f_{s1} \right) \right] + \\ + \frac{D_0}{4} \frac{\theta(v-v_0)}{v^3} \frac{d}{dv} v^3 \left[1 - \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right] \frac{df_{sM}}{dv} = 0. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Функцию $f_{s1}(v)$, удовлетворяющую граничным условиям $f_{s1}(0) = f_{s1}(\infty) = 0$, можно найти с помощью функции Грина уравнения (2.194). Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу результаты [136]:

$$j_s = \frac{Z_s e}{2B} \int_0^{\infty} v dv \frac{\Phi(v) a(v) [1+a(v)]^{b-1}}{3b+1} F\left(b, b + \frac{1}{3}, b + \frac{4}{3}, -a(v)\right), \quad (2.195)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \Phi(v) &= -\frac{D_0}{4} \frac{\theta(v-v_0)}{v^3} \frac{d}{dv} v^3 \left(1 - \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right)^2 \frac{df_{sM}}{dv}; \\ a(v) &= \frac{1}{2} \frac{M_i}{M_s} \frac{Bv^3}{A}; \quad b = 1 + \frac{1}{3} \frac{M_i}{M_s}; \end{aligned}$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрическая функция. Выражение для поглощенной ВЧ-мощности полностью аналогично (2.190). Предположение о максвелловости симметричной части функции распределения ионов добавки совместно с неравенством $v_0 \gg v_{Ts}$ позволяет упростить (2.195), поскольку в этом случае вклад в интеграл дает узкая область скоростей $\Delta v \sim v_{Ts}^2/v_0$ вблизи $v=v_0$, где гипергеометрическая функция меняется слабо. В результате из (2.195) и (2.190) следует:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{3}{2} e Z_s \frac{M_i}{AM_s^2} v_0^2 (1+a(v_0))^{b-2} \times \\ &\times \int_0^1 \left(\frac{x^3}{1+x^3 a(v_0)} \right)^b \frac{1+a(v_0)b - a(v_0)x^3(b-1)dx}{1+a(v_0)x^3}. \end{aligned} \quad (2.196)$$

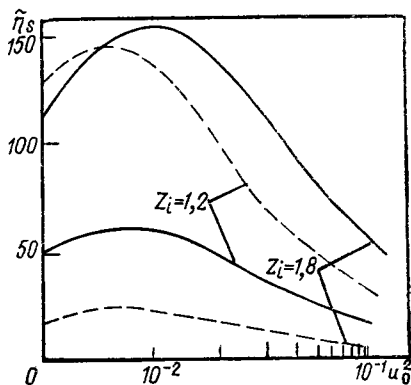


Рис. 2.22. Зависимость эффективности $\tilde{\eta}_s = n_s \Lambda n_e / T_e$ (n_e — в 10^{14} см $^{-3}$, j — в А/см 2 , p — в Вт/см 3 , T_e — в кэВ) для H и ^3He

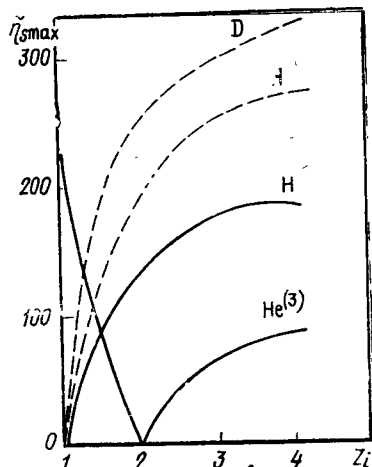


Рис. 2.23. Зависимость $\tilde{\eta}_s(v_{\max})$ от z_i без учета тороидальных эффектов (штриховая линия — соответствующая зависимость $\tilde{\eta}_b$ для генерации тока пучком быстрых атомов в пределе $\epsilon = 0$ [31])

Используя асимптотическое разложение гипергеометрической функции, можно показать, что при $a(v_0) \ll b$

$$\eta_s \approx \frac{3}{2} \frac{eZ_s v_0^2}{M_s A} \frac{M_i / M_s}{4 + M_i / M_s}, \quad (2.197)$$

а при $a(v_0) \gg b$

$$\eta_s \approx \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(b+1/3)}{\Gamma(b)\Gamma(1/3)} \frac{eZ_s}{M_s B \left(\frac{1}{2} \frac{B}{A} \frac{M_i}{M_s} \right)^{1/3} v_0^2}. \quad (2.198)$$

Из (2.197), (2.198) следует, что эффективность генерации тока ИЦ-волнами при нагреве малой добавки ионов растет с ростом v_0 как $\eta_s \sim v_0^2$ при $a(v_0) \ll b$ и начинает падать как $\eta_s \sim v_0^{-2}$ при выполнении обратного неравенства $a(v_0) \gg b$. Максимум эффективности достигается при выполнении условия $a(v_0) \simeq b$:

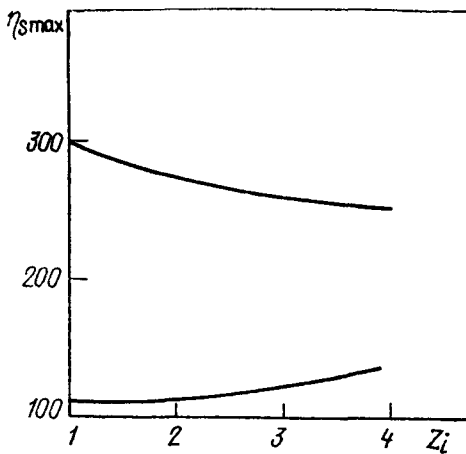
$$\left(\frac{v_{\max}}{v_{Te}} \right)^3 = \frac{3}{4} \frac{mZ_i}{M_i} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{M_i}{M_s} \right). \quad (2.199)$$

Чтобы получить выражение для эффективности генерации полного тока, следует, как и в случае пучка нейтральных атомов, учесть экранирующий ток электронов и неклассические поправки [31]:

$$\eta_{\text{ИЦ}} \approx \left| 1 - (Z_s / Z_i) (1 - 1,46 \sqrt{\epsilon A^*}) \right| \eta_s. \quad (2.200)$$

В общем виде выражение (2.200) с η_s из (2.196) исследовалась численно для смеси 50 % D + 50 % T с добавкой водорода и He⁽³⁾ [136]. На рис. 2.22 приведены зависимости $\tilde{\eta}_s = \eta_s n_{e14} / T_e$ (j_s измеряется в А/см², $p_{ИЦ}$ — в Вт/см³, T_e — в кэВ, n_e — в 10¹⁴ см⁻³) для H и He⁽³⁾ от параметра $u_0^2 = v_0^2 / v_{Te}^2$, на рис. 2.23 — $\tilde{\eta}_s(v_{max})$ от z_i без учета тороидальных эффектов [136], а на рис. 2.24 — зависимость $\tilde{\eta}_{ИЦ}(v_{max})$ от эффективного заряда Z_i . Видно, что учет тороидальных эффектов даже при сравнительно малых ϵ ($\epsilon \geq 0,02$) практически приводит к исчезновению резонансной зависимости $\tilde{\eta}_{ИЦ}$ от Z_i . Отметим также, что из рис. 2.23 следует, что максимальная эффективность генерации тока ИЦ-волнами несколько ниже η_b для пучка быстрых атомов

Из (2.199) следует, что максимум эффективности генерации тока нагревом малой добавки ионов достигается при весьма больших значениях резонансной скорости $v_{max} \simeq v_{Te} (m/M_s)^{1/3} \simeq v_{Ts} (M_s/m)^{1/6}$. Если, кроме того, учесть, что для реализации условий селективного нагрева ионов добавки их плотность не должна превышать нескольких процентов n_e , то нетрудно показать, что получение значительной плотности тока неизбежно приводит к необходимости сильного искажения симметричной части функции распределения добавки (иначе говоря, для получения заметных значений j_s необходимо выполнение неравенства $T_s \gg T_e, T_i$). Исследование этого предельного случая возможно лишь с использованием численных методов, которые, к сожалению, пока достаточно не изучены, а были ориентированы в основном на конкретные параметры реактора-токамака ИНТОР [137]. Тем не менее из проведенных расчетов можно сделать некоторые общие выводы



Отмечено (рис. 2.25), что с ростом ВЧ-мощности эффективность генерации тока падает. Этот эффект является прямым следствием (2.198) и необходимости получения больших плотностей токов ионов при малой концентрации ионов добавки. Поскольку в любом случае $j_s \leq e Z_s n_s v_0$, то для получения больших значений j_s при $n_s/n_e \sim 10^{-2}$ требуется сильный нагрев добавки $v_0 \gg v_{Ti}$. С другой стороны, увеличение мощности нагрева (т. е. v_0) неизбежно приводит к падению эффективности из-за увеличения ро-

Рис 2.24 Зависимость $\tilde{\eta}_s(v_{max})$ от z_i с учетом тороидальных эффектов

ли ион-электронных столкновений. Особенно ярко этот эффект проявляется при использовании БМЗ-волн, для которых коэффициент квазилинейной диффузии практически не зависит от поперечной скорости частиц.

При выполнении неравенства $Q(f_s) \gg C^{col}(f_s)$ функция распределения ионов добавки обогащается частицами с большей поперечной энергией, для которых $\tau_{se} \ll \tau_{si}$ (рис. 2.26). В какой-то степени предотвратить этот нежелательный эффект помогает использование бернштейновских волн, для которых оператор — коэффициент квазилинейной диффузии $D_{иц}$ пропорционален $D_{иц} \sim J_l^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Bs}) / (k_{\perp}^2 v_{\perp}^2)$ (l — номер гармоники циклотронной частоты ионов добавки, имеющей резонанс $\omega = l\omega_{Bs}$). На рис. 2.27 [137] показано распределение f_s при нагреве бернштейновской модой в условиях, аналогичных рис. 2.26. Видно, что доля быстрых частиц в этом случае существенно меньше.

Нужно сказать, что трудности оптимизации схемы генерации тока на малой добавке ионов в практически интересном случае реактора-токамака, по-видимому, имеют принципиальный харак-

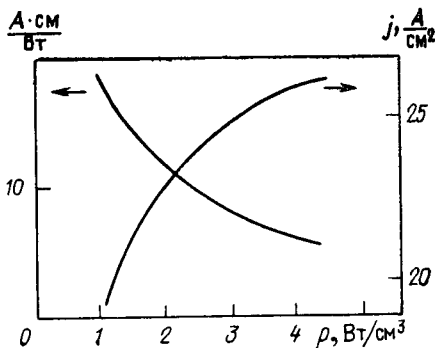


Рис. 2.25. Зависимость $\eta_{иц}$ и плотности ИЦ-тока от удельной поглощенной ВЧ-мощности для реактора-токамака ИНТОР [137]

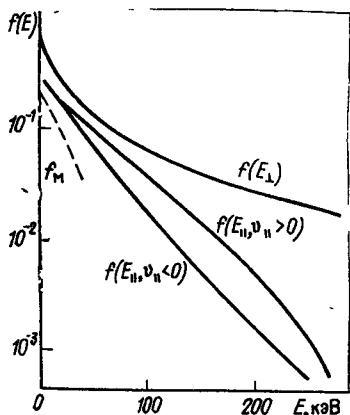


Рис. 2.26. Форма функций распределения ионов малой добавки при несимметричном ИЦ-нагреве БМЗ-волнами [137]

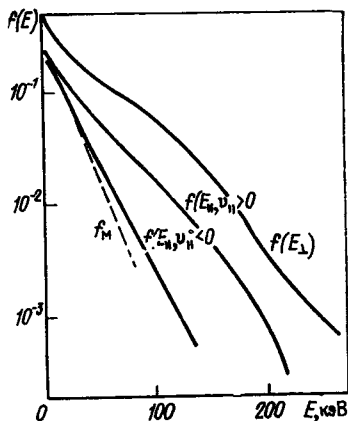


Рис. 2.27 Форма функций распределения ионов малой добавки при нагреве бернштейновской волной

тер, что заставило авторов [137] сделать вывод о неперспективности использования этого метода.

В заключение укажем, что в ряде работ предлагается использовать в качестве ионов малой добавки рождающиеся в D—T-реакции α -частицы. Численные расчеты для этого случая проведены в [137]. И, наконец, в [138] предложена схема комбинированного использования ИЦ-волн и пучков нейтралов для генерации стационарного тока. Ее основным преимуществом является задаваемая инжекцией исходная несимметрия функции распределения f_s по продольной скорости, что в принципе позволяет не так тщательно заботиться об однопроходном поглощении ВЧ-энергии.

3. ДИНАМИКА СОЗДАНИЯ ТОКА В ТОКАМАКЕ

3.1. Кинетика генерации тока в плазме с электрическим полем

3.1.1. Формула Грина для кинетического уравнения. В предыдущей главе процесс генерации тока в плазме рассматривался в отсутствие вихревого электрического поля. Такой подход представляется вполне естественным, когда речь идет о стационарном токамаке с постоянным током. Однако любое изменение или перераспределение тока сопровождается появлением индукционного электрического поля, препятствующего этому изменению. Электрическое поле оказывает существенное влияние на кинетику электронов и приводит к ряду новых физических явлений, сопровождающих генерацию тока в токамаке. Одним из примеров может служить ограничение максимально возможной скорости роста тока при использовании НГ-метода генерации тока.

Другое упрощающее предположение состояло в том, что плотность и температура плазмы считались заданными в пространстве и постоянными во времени. Это предположение оправдано, когда изучаются стационарные или такие квазистационарные процессы, как подъем тока или перемагничивание индуктора, превышающие по длительности все характерные времена токамака, кроме скиновых. В реальных экспериментах длительность стадии безындукционного поддержания тока обычно сравнима со скиновым временем. Поэтому для детального сопоставления теории с экспериментом необходимо самосогласованное описание всего комплекса процессов, сопровождающих создание безындукционного тока в токамаке. Такое описание включает расчет пространственного распределения плотности безындукционного тока, учет влияния этого тока на энергобаланс плазмы и удержание частиц, роль вихревого электрического поля и т. д. В настоящем параграфе развит метод описания кинетики небольшой группы частиц, создающих ток в плазме за счет поглощения энергии внешнего источника. Математической основой метода служит свойство самосопряженности лиnearизованного оператора кулоновских столкновений. Ранее это

свойство послужило основой методов теории переноса [139, 140]. Однако в отличие от теории процессов переноса, где процесс определяется основной сильностолкновительной массой частиц, в теории генерации тока приходится рассматривать и пучки быстрых слабостолкновительных частиц, что потребовало разработки специальных подходов. Главная физическая идея состоит в том, что во многих приложениях не требуется полной информации о функции распределения частиц, следовательно, нет необходимости и в полном решении кинетического уравнения Больцмана. Например, для задач генерации тока в большинстве случаев достаточно знать плотность тока и поглощенную энергию. Это позволяет вместо того, чтобы искать функцию распределения, а затем вычислять ее соответствующий момент, найти функцию отклика на некоторое специфическое возмущение равновесного распределения, после чего искомый момент определится сверткой функции отклика с оператором, описывающим воздействие внешнего источника.

При малом уровне вводимой мощности такая процедура полностью определяет решение и позволяет достичь заметного прогресса в аналитическом исследовании. Однако при сильном искажении функции распределения частиц под действием внешнего источника задача допускает только численное решение, и на первый взгляд метод формулы Грина не дает каких-либо преимуществ. Но поскольку численное моделирование нестационарных процессов требует многократного вычисления плотности тока и других параметров, то и в этом случае выигрыш может оказаться весьма существенным. К проблеме генерации тока ВЧ-волнами этот метод был впервые применен в [127]. Ранее аналогичный подход был использован Хиршманом [141] для решения задачи о генерации тока пучком нейтральных атомов. Существенное развитие метод получил в работе [142], на которой главным образом и основано последующее изложение.

Для определенности рассмотрим электронную функцию распределения $f(v, t)$, удовлетворяющую кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C^{\text{col}}(f) + Q(f), \quad (3.1)$$

где F — сила, действующая на электрон со стороны внешних магнитов \mathbf{B} и электрического \mathbf{E} полей, т. е.

$$\mathbf{F} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right). \quad (3.2)$$

Конкретный вид оператора $Q(f)$, описывающего внешний источник частиц и энергии, обусловлен рассматриваемым методом генерации тока. При получении формулы Грина будем считать его произвольным. Уравнение (3.1) записано для случая однородной плазмы $\partial/\partial r = 0$, хотя учет соответствующего слагаемого в левой части уравнения (3.1) принципиальных затруднений не представляет. Например, в работе [127] рассмотрена произвольная торо-

идально-симметричная магнитная конфигурация и учтена роль продольной вариации f на магнитной поверхности.

Поскольку в наиболее перспективных методах генерации тока функция распределения основной массы частиц остается максвелловской, то задачу можно линейризовать, считая

$$f = f_M(1+h), \quad (3.3)$$

где f_M — максвелловская функция распределения

$$f_M = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right) \quad (3.4)$$

с плотностью n и температурой T . Подставляя (3.3) в (3.1), получаем уравнение для функции h :

$$L_{v,t}[h] \equiv \frac{\partial}{\partial t}(f_M h) + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial v}(f_M h) - C(h) = Q(f) - \frac{\partial f_M}{\partial t} - \mathbf{F} \frac{\partial f_M}{\partial v}. \quad (3.5)$$

Для тех задач, в которых нас будет интересовать эволюция функции распределения во времени, ввиду линейности уравнения естественно следить за процессом, начиная с невозмущенного максвелловского распределения. Потребуем поэтому, чтобы функция $h(v, t)$ удовлетворяла однородному начальному условию

$$h(\mathbf{v}, 0) = 0. \quad (3.6)$$

В некоторых задачах будет достаточно знать стационарную функцию распределения $\lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{v}, t)$. В этих задачах начальное условие несущественно.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (3.5). Ее можно переписать в виде

$$Q_1 \equiv Q(f) - f_M \frac{d \ln n}{dt} + f_M \left(\frac{3}{2} - \frac{mv^2}{2T} \right) \frac{d \ln T}{dt} - \frac{\partial}{\partial v}(f_M \mathbf{F}). \quad (3.7)$$

Интегрируя (3.5) по всему фазовому пространству скоростей, находим:

$$-\frac{d}{dt} \int f_M h d^3v = \int Q(f) d^3v - \frac{dn}{dt}. \quad (3.8)$$

Это равенство выражает закон сохранения частиц для уравнения (3.5). Для того чтобы величина $n(t)$ имела физический смысл плотности электронного компонента плазмы, нужно потребовать обращения в нуль левой части (3.8). Вместе с (3.6) это приводит к условию ортогональности функций f_M и h :

$$\int f_M h d^3v = 0. \quad (3.9)$$

Теперь (3.8) приобретает вид уравнения плотности

$$dn/dt = \int Q(f) d^3v \quad (3.10)$$

и показывает, что плотность $n(t)$ должна быть задана согласованно с исходным уравнением (3.1).

Аналогичное рассмотрение для температуры электронов показывает, что функция h ортогональна также и к $v^2 f_M$, т. е.

$$\int f_M h v^2 d^3v = 0, \quad (3.11)$$

причем зависимость температуры от времени подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n \frac{dT}{dt} = \int \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{3}{2} T \right) Q d^3v + \\ + \int \left[C^{\text{col}}(v) - F \frac{\partial}{\partial v} (1+h) f_M \right] \frac{mv^2}{2} d^3v. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В интересующем нас случае сильного магнитного поля естественно считать, что возмущенная функция распределения h зависит только от переменных $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$ и $\chi = v_{\parallel}/v$, где v_{\parallel} и v_{\perp} — продольный и поперечный по отношению к направлению магнитного поля компоненты вектора скорости \mathbf{v} . Тогда линеаризованный относительно максвелловского распределения оператор столкновений $C(h)$ имеет вид (2.182). Обозначим столкновительный поток частиц в пространстве скоростей, связанный с отклонением от максвелловского распределения, $S_C(h)$ так, чтобы выполнялось условие

$$C(h) = -(\partial/\partial \mathbf{v}) S_C(h). \quad (3.13)$$

Тогда нетрудно убедиться, что имеет место свойство

$$\int_V d^3v [hC(g) - gC(h)] = \int_{\Sigma} d\sigma [gS_C(h) - hS_C(g)], \quad (3.14)$$

где Σ — поверхность, ограничивающая объем V в пространстве скоростей. При распространении области интегрирования в левую часть (3.14) на все фазовое пространство правая часть равенства обращается в нуль, и формула (3.14) выражает факт самосопряженности оператора $C(h)$.

Введем теперь оператор M сопряженный с оператором L (3.5):

$$M_{\mathbf{v},t}[g] = -f_M \frac{\partial g}{\partial t} - f_M F \frac{\partial g}{\partial v} - C(g). \quad (3.15)$$

Функция влияния мгновенного точечного источника для уравнения (3.5) в соответствии с общей теорией уравнений в частных производных [143] ищется как решение уравнения

$$M_{\mathbf{v},t'}[g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t')] = f_M(v', t') [C_1(\mathbf{v}, t, t') + v'^2 C_2(\mathbf{v}, t, t')] \quad (3.16)$$

на интервале $0 < t' < t$ с начальным условием

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t')|_{t'=t} = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + c_1(\mathbf{v}, t) + v'^2 c_2(\mathbf{v}, t). \quad (3.17)$$

Задача (3.16), (3.17) должна быть дополнена граничными условиями по переменной \mathbf{v}' на некоторой поверхности Σ . Кроме того, функции C_1, C_2, c_1, c_2 подбираются так, чтобы выполнить условие

$$\int_V d^3v' g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t') \partial_{iM}(v', t') / \partial t' = 0. \quad (3.18)$$

В частности, это условие будет выполнено, если потребовать ортогональность функции g по аргументу \mathbf{v}' к функциям $f_M(v', t')$ и $v'^2 f_M(v', t')$

Применим интегральный оператор $\int_0^t dt' \int_V d^3v'$ к комбинации

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t') L_{\mathbf{v}', t'} [h(\mathbf{v}', t')] - h(\mathbf{v}', t') M_{\mathbf{v}', t'} [g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t')].$$

Тогда с учетом свойств (3.5)–(3.7), (3.13)–(3.17), а также свойств ортогональности получим:

$$\begin{aligned} j_M(v, t) h(\mathbf{v}, t) &= \int_0^t dt' \int_V d^3v' [Q(j) g + \mathbf{F}_{jM} \partial g / \partial \mathbf{v}'] - \\ &- \int_0^t dt' \int_{\Sigma} d\sigma g [\mathbf{S}_c(h) + \mathbf{F}_{jM}(1+h)] + \int_0^t dt' \int_{\Sigma} d\sigma h \mathbf{S}_c(g). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь все подынтегральные функции, за исключением $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t')$, имеют аргументы \mathbf{v}' и t' . Соотношение (3.19) является формулой Грина для решения задачи (3.5), (3.6) и выражает основной результат настоящего параграфа.

Как уже отмечалось, большая часть прикладных задач не требует знания функции распределения $f(\mathbf{v}, t)$ — вся необходимая для них информация сводится к отысканию нескольких моментов от $f(\mathbf{v}, t)$. Соответственно упрощается и математический аппарат, связанный с использованием формулы Грина. Предположим, что требуется найти результат интегрирования функции распределения с весом $q(\mathbf{v})$. Обозначим соответствующий интеграл

$$H(t) = \int d^3v j_M(v, t) h(\mathbf{v}, t) q(\mathbf{v}). \quad (3.20)$$

Введем также обозначение

$$G(\mathbf{v}, t, t') = \int d^3v' g(\mathbf{v}', \mathbf{v}, t, t') q(\mathbf{v}'). \quad (3.21)$$

Наконец, проинтегрировав формулу (3.19) по переменной \mathbf{v} с весом $q(\mathbf{v})$, получим

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t dt' \int_V d^3v [Q(j) G + \mathbf{F}_{jM} \partial G / \partial \mathbf{v}'] - \\ &- \int_0^t dt' \int_{\Sigma} d\sigma G [\mathbf{S}_c(h) + \mathbf{F}_{jM}(1+h)] + \int_0^t dt' \int_{\Sigma} d\sigma h \mathbf{S}_c(G). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Функция $G(\mathbf{v}, t, t')$ имеет смысл функции влияния для момента H и в интервале $0 < t' < t$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{\partial G}{\partial t'} + \mathbf{F}(\mathbf{v}, t') \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} + [f_M(\mathbf{v}, t')]^{-1} C(G) = C_1(t, t') + v^2 C_2(t, t') \quad (3.23)$$

с условием

$$G(\mathbf{v}, t, t')|_{t'=t} = q(\mathbf{v}) + c_1(t) + v^2 c_2(t), \quad (3.24)$$

причем величины C_1 , C_2 и c_1 , c_2 подбираются так, чтобы

$$\int d^3v G \partial f_M / \partial t' = 0 \quad (3.25)$$

для любых t и t' .

Полученные формулы имеют простую физическую интерпретацию, а именно: функция влияния $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t, t')$ описывает функцию распределения частиц по скорости \mathbf{v} в момент времени t , если в начальный момент времени $t=t'$ в точке \mathbf{v}' действовал мгновенный сосредоточенный источник специального вида или, что то же самое, в начальный момент времени $t=t'$ распределение частиц имело вид (3.17). Соответственно $G(\mathbf{v}, t, t')$ представляет собой эволюцию некоторого момента от этой функции распределения.

Формула Грина (3.19) дает решение задачи (3.5) с нулевым начальным условием (3.6). Если возникнет такая необходимость, то формулу (3.19) легко, добавив одно слагаемое, обобщить на произвольное начальное условие.

Дополнительные ограничения (3.18) на функцию g и (3.25) на функцию G , а также появление «лишних» слагаемых в начальных условиях (3.17) и (3.24) означает, что функции Грина ищутся в классе функций, сохраняющих полную энергию и количество частиц электронного компонента плазмы. Эти условия, вообще говоря, не являются обязательными. Они появились только из-за того, что аналогичные условия (3.9) и (3.11) были наложены на искомую функцию распределения (3.3).

Если коэффициенты и правая часть уравнения (3.1) не зависят от времени, то может оказаться полезным отыскание стационарного решения задачи $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}, t)$. Очевидно, что если такое решение существует, то оно должно определяться формулами (3.19) или (3.22) при $t \rightarrow \infty$. Совершив соответствующий предельный переход, перепишем (3.22) в виде

$$H = \int_V d^3v \left[\Gamma Q + F f_M \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{v}} \right] - \int_S d\sigma \Gamma [S_c(h) + F f_M (1+h)] + \int_{\Sigma} d\sigma h S_c(\Gamma), \quad (3.26)$$

где стационарная функция источника $\Gamma(\mathbf{v})$ связана с функцией $G(\mathbf{v}, t, t')$ соотношением

$$\Gamma(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t G(\mathbf{v}, t, t') dt' \quad (3.27)$$

и является решением уравнения

$$\mathbf{F} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{v}} + [f_M(\mathbf{v})]^{-1} C(\Gamma) + q(\mathbf{v}) = \gamma_1 + v^2 \gamma_2. \quad (3.28)$$

Здесь, как и выше, выбор констант γ_1 и γ_2 должен обеспечить ортогональность функции Γ к функциям f_M и $v^2 f_M$.

До сих пор мы говорили о кинетическом уравнении для функции распределения электронов. Отличие соответствующей задачи для ионного компонента состоит только в другой форме интеграла столкновений. Это различие не принципиально, так как та часть оператора столкновений, которая содержит производные второго порядка, отличается от (2.182) лишь множителем. Поэтому формулы (3.19) и (3.22) легко перенести на случай ионной функции распределения и ее моментов.

Область применимости развитого выше аппарата весьма широка и охватывает такие явления, как процессы переноса, проводимость, тормозное и циклотронное излучение, убегание электронов и другие процессы, сопровождающие искажение функции распределения. Традиционные методы описания этих явлений, такие, как метод Чепмена—Энскога, эффективные в пределе малой длины пробега, неприменимы к плазме с током, поддерживаемым быстрыми волнами. В этом случае ток переносится группой быстрых слабостолкновительных электронов, а искажение функции распределения является сильно негидродинамическим, даже если это искажение невелико. Использование функций влияния и формулы Грина открывает возможность адекватного описания перечисленных процессов в плазме с пучками быстрых частиц. Например, в [142] обсуждаются возможные подходы к описанию процессов переноса в плазме с током, генерируемым внешним ВЧ-источником. Теория большей части названных выше явлений еще только начинает разрабатываться. Некоторые первые результаты обсуждем ниже.

3.1.2. Функция Грина для плотности тока. Воспользуемся развитой методикой для решения основной задачи настоящего обзора — определения значения тока, создаваемого в плазме токамака без помощи индуктора. Основное внимание уделено роли вихревого электрического поля, которое в силу законов электромагнитной индукции всегда возникает при изменении тока в проводнике. Оставляя в стороне специфически тороидальные аспекты этой задачи, будем считать, что медленно меняющееся (смысл слова «медленно» уточнен ниже) электрическое поле \mathbf{E} совпадает по направлению с внешним однородным магнитным полем \mathbf{B} , а говоря о плотности тока, будем иметь в виду продольную плотность тока. Так как влиянием электрического поля на ток ионного компонента плазмы обычно можно пренебречь, ограничимся рассмотрением только тех методов генерации тока, которые основаны на взаимодействии внешнего источника с электронами. Не конкретизируя пока физическую природу этого источника, предположим,

что он описывается слагаемым $Q(f)$ в правой части кинетического уравнения (3.1), и представим в виде

$$Q(f) = -\partial S_Q(f)/\partial v. \quad (3.29)$$

В частности, такую форму имеет оператор квазилинейного взаимодействия частиц с ВЧ-волнами, а также оператор столкновений электронов с быстрыми ионами при генерации тока пучком нейтральных атомов.

Для того чтобы момент H от функции распределения, выражаемый формулами Грина (3.22) или (3.26), совпадал с продольной плотностью тока j , достаточно выбрать $q(v) = -ev_{\parallel}$. Соответствующая функция влияния $J(v)$ представляет собой решение уравнения

$$[f_M(v)]^{-1} C(J) = ev_{\parallel} \frac{eE}{m} \frac{\partial J}{\partial v_{\parallel}}. \quad (3.30)$$

Решив это уравнение, можно с помощью (3.26) выразить продольную плотность тока в плазме как

$$j = \int d^3v \left(S_Q - \frac{eE}{m} f_M e_{\parallel} \right) \frac{\partial J}{\partial v}. \quad (3.31)$$

Здесь $e_{\parallel} = \mathbf{V} / |\mathbf{V}|$, и отброшен поверхностный интеграл, роль которого будет обсуждаться в п. 3.2.3. Выражение (3.31) представляет собой общую форму записи закона Ома в плазме с неиндукционным источником тока. Конкретную форму закону Ома можно придать, если конкретизировать метод генерации тока. Некоторые частные случаи рассмотрены в п. 3.2.4.

В общем случае формула (3.31) не позволяет вычислить плотность тока j , даже если известно решение уравнения (3.30) для J . Дело в том, что стоящий под знаком интеграла в (3.31) поток частиц $S_Q(f)$ зависит от неизвестного решения исходной задачи (3.1) $f = f_M(1+h)$. Вместе с тем отклонением функции распределения f от максвелловской f_M можно пренебречь, например, при малой плотности пучка, если ток создается инжекцией пучка нейтральных атомов, а также при узком спектре или малой мощности ВЧ-волн, если ток создается с помощью внешнего ВЧ-источника. В тех случаях, когда функция распределения слабо отличается от максвелловской $|h| \ll 1$, преимущество использования формулы Грина состоит в том, что задача решения кинетического уравнения (3.1) заменяется более простой и, главное, хорошо изученной задачей решения уравнения (3.30), которое известно как уравнение Спитцера — Хэрма [144].

Обычно используемое для решения уравнения (3.30) разложение по полиномам Лагерра [140] имеет недостаточную точность в области больших энергий. Решение уравнения (3.30), справедливое во всем диапазоне нерелятивистских энергий, было найдено в [141] с помощью эквивалентного вариационного принципа. Решение уравнения (3.30) представлено в форме, удобной для при-

менения в численных расчетах, и использовано для вычисления электронного тока, создаваемого пучком быстрых ионов. Ниже для сохранения наглядности ограничимся более простым случаем $v \gg v_{Te}$, в котором уравнение (3.30) имеет простое аналитическое решение.

Считая электрическое поле E слабым, будем искать решение уравнения (3.30) в виде ряда

$$J(\mathbf{v}) = J_0(\mathbf{v}) + J_1(\mathbf{v}) E/E_{кр} + O(E^2/E_{кр}^2), \quad (3.32)$$

где

$$E_{кр} = 4\pi e^3 n_e \Lambda / T_e \quad (3.33)$$

— критическое поле, причем $E \ll E_{кр}$. Функции $J_n(\mathbf{v})$ естественно искать в виде ряда по сферическим гармоникам, причем ряд для J_0 содержит только первую гармонику, т. е.

$J_0(\mathbf{v}) = \chi(v) \cos \theta$, ряд для J_1 — только нулевую и вторую и т. д. Для функции $\chi(v)$ при $v \gg v_{Te}$ получим уравнение

$$\frac{d}{dv} \frac{T_e}{mv} \frac{d\chi}{dv} = \frac{d\chi}{dv} + \frac{1+Z_i}{v} \chi + \frac{2mv^3}{E_{кр} v_{Te}^2}, \quad (3.34)$$

решение которого выражается через вырожденные гипергеометрические функции. Поскольку нас интересует только асимптотика функции χ при $v \gg v_{Te}$, то решение уравнения (3.34) проще искать с помощью итераций [37]. Для этого достаточно заметить, что левая часть (3.34) имеет более низкий порядок роста по v/v_{Te} , чем правая. Первые два члена построенного методом последовательных приближений разложения дают следующее выражение для функции $J_0(\mathbf{v})$:

$$J_0(\mathbf{v}) = - \frac{2mv^4 \cos \theta}{(5+Z_i) E_{кр} v_{Te}^2} \left(1 + \frac{9}{2(3+Z_i)} \frac{v_{Te}^2}{v^2} + \dots \right). \quad (3.35)$$

Подставив $J_0(\mathbf{v})$ в правую часть уравнения (3.30), тем же методом найдем $J_1(\mathbf{v})$:

$$J_1(\mathbf{v}) = \frac{4mv^6(2+Z_i+3\cos^2\theta)}{3(5+Z_i)(3+Z_i)E_{кр}v_{Te}^4} + \dots \quad (3.36)$$

Если определить критическую скорость $v_{кр}$ соотношением

$$v_{кр}^2 = v_{Te}^2 E_{кр} / E, \quad (3.37)$$

то, сравнив (3.35) и (3.36), можно записать условия справедливости представления функции Грина $J(\mathbf{v})$ в виде (3.32), (3.35), (3.36) как

$$v_{Te}^2 \ll v^2 \ll v_{кр} v_{Te}. \quad (3.38)$$

Зависимость тока от напряженности электрического поля мы подробно обсудим в п. 3.2.4, а пока перепишем формулу (3.31) для случая $E=0$:

$$j_0 = \int d^3v S_Q(j) \partial J_0 / \partial v. \quad (3.39)$$

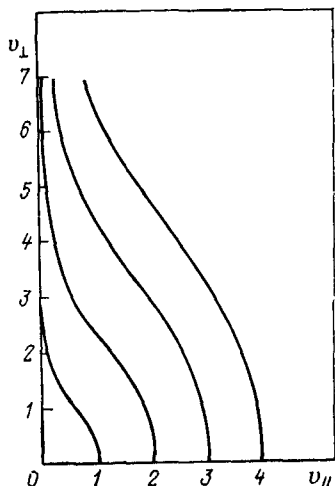


Рис. 3.1. Схематическое изображение линий уровня функции отклика $J(v)$ при нулевом электрическом поле $E=0$ в однородной плазме

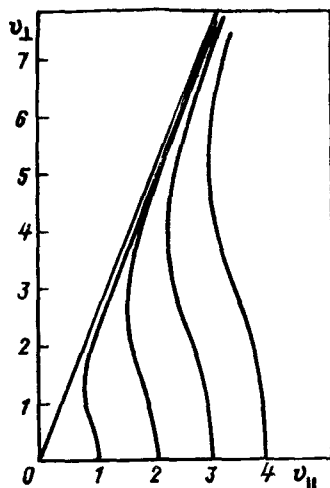


Рис. 3.2. Схематическое изображение линий уровня функции $J(v)$ при нулевом электрическом поле $E=0$ в тороидальной геометрии (выделен конус запертых частиц) [129]

Здесь j_0 означает плотность стационарного тока, создаваемого внешним источником Q в отсутствие вихревого электрического поля. Физический смысл входящей в это выражение функции отклика $J_0(v)$ состоит в следующем [15]. Предположим, что в начальный момент времени электрон имеет скорость v . Если продольный компонент вектора v отличен от нуля, $v_{\parallel} \neq 0$, то этот электрон переносит продольный ток $-ev_{\parallel}$. С течением времени из-за столкновений электрон теряет свою направленную скорость, а переносимый им ток экспоненциально затухает. Характерное время этой экспоненты — время потери импульса электро-

на τ . За время t произойдет смещение заряда $l(t) = \int_0^t v_{\parallel}(t) dt$.

Функция отклика $J(v)$ в стационарной формуле Грина (3.26) выражает результирующее смещение заряда с начальной скоростью v , т. е. $J(v) = -e \lim_{t \rightarrow \infty} l(t)$.

Предельный переход здесь означает, что время t существенно больше времени электронных столкновений. Линии уровня функции $J_0(v) = J(v, E=0)$ показаны на рис. 3.1. С помощью этого рисунка легко дать физическую интерпретацию многим методам генерации тока. Например, из рис. 3.1 сразу видно, что чисто поперечный нагрев электронов соответствует увеличению $J_0(v)$. Если этот нагрев не симметричен по v_{\parallel} , то возникает ток. Такой механизм используется при генерации тока электронно-циклотронными волнами.

Как уже говорилось, формула Грина легко обобщается на случай тороидальной плазмы. Мы не будем приводить здесь соответствующие формулы и ограничимся модельным обобщением функции отклика J_0 на тороидальную геометрию [129]. На рис. 3.2, взятом из [129], показана функция J_0 в предположении, что банановые частицы тока не переносит, а ток пролетных частиц уменьшен на некоторый фактор, характеризующий степень близости их к запертым. Несмотря на качественный характер этого рисунка, он дает полезную иллюстрацию влияния запертых частиц на генерацию тока. Например, сравнение рис. 3.1 и 3.2 показывает, что на нижнегибридный метод генерации тока и другие методы, основанные на сообщении продольного импульса надтепловым частицам $v_{||} \gg v_{Te}$, тороидальные эффекты практически не влияют. В то же время электронно-циклотронный метод, приводящий к увеличению количества банановых частиц, а также пучковый и альфвеновский методы генерации, ускоряющие тепловые частицы, существенно модифицируются под влиянием запертых электронов. Из рис. 3.2 также легко следует интерпретация методов, использующих перевод частиц из пролетных в запертые и обратное (см. § 1.1).

До сих пор мы говорили о стационарной формуле Грина (3.26), использование которой предполагает, что величины n_e , T_e , E , j от времени не зависят. Однако интерпретация функции Грина как отклика на сообщение электрону некоторой начальной скорости \mathbf{v} показывает, что плазма «помнит» об этом в течение конечного времени τ_p . Если параметры плазмы изменяются за время большее, чем τ_p , то по-прежнему справедлива стационарная формула (3.26). Если же параметры плазмы изменяются быстрее, чем происходит потеря импульса электроном, взаимодействующим со сторонним источником тока, то надо пользоваться формулами (3.22) — (3.24).

3.1.3. Наведенная проводимость. Рассмотрим теперь случай ненулевого электрического поля $E \neq 0$. Формулу (3.31) можно записать в виде

$$j = \int d^3v \left(S_0 + S_1 \frac{E}{E_{кр}} + \dots - \frac{\partial_c E}{m} f_{me} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(J_0 + J_1 \frac{E}{E_{кр}} + \dots \right), \quad (3.40)$$

где величина S_Q разложена в ряд по степеням отношения $E/E_{кр}$ аналогично тому, как это было сделано выше для J (3.32). Уравнение (3.40) показывает, что отклик плазмы на появление конечного электрического поля нелинеен. Тем не менее для наглядности вначале ограничимся допускающим аналитическое рассмотрение предельно малого E . Удерживая только члены, линейные по E , можно переписать (3.40) в виде закона Ома:

$$j = j_0 + (\sigma_s + \sigma_1) E, \quad (3.41)$$

где j_0 определяется формулой (3.39); σ_s — спитцеровская проводимость [144],

$$\sigma_s = -\frac{e}{m} \int d^3v f_M \partial J / \partial v_{\parallel} \quad (3.42)$$

и

$$\sigma_1 = \frac{1}{E_{кр}} \int d^3v \left(S_1 \frac{\partial J_0}{\partial v} + S_0 \frac{\partial J_1}{\partial v} \right) \quad (3.43)$$

— так называемая «наведенная» или «горячая» проводимость [145]. Из (3.40) видно, что совместное воздействие на плазму постоянного электрического поля и дополнительной силы, приложенной к электронам, приводит к тому, что полный ток превышает сумму токов, возникающих при отдельном включении электрического поля $j_s = \sigma_s E$ и дополнительной мощности $j_0 = \eta p_Q$ на $j_1 = \sigma_1 E$:

$$j = j_s + j_Q = j_s + j_0 + j_1. \quad (3.44)$$

Другими словами, действия электрического поля и силы, связанной с внешним источником Q , оказываются неаддитивными. А именно, при $E \rightarrow 0$ исчезают первое и третье слагаемые в правой части формулы (3.44), а при $Q \rightarrow 0$ — второе и третье.

Найдем наведенную проводимость σ_1 . Общая схема вычисления этой величины такова. Нужно найти решение кинетического уравнения (3.1) в случае постоянного электрического поля:

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + C^{\text{col}}(f) = \frac{\partial}{\partial v} S_Q(f). \quad (3.45)$$

Затем, представив функцию распределения f в виде ряда по степеням E ($f = f_0 + f_1 E / E_{кр} + \dots$), рассчитать потоки S_0 и S_1 как

$$S_0 = S_Q(f_0); \quad S_1 = S_Q(f_1) \quad (3.46)$$

и подставить эти значения в интеграл (3.43). Аналитически такую процедуру легко осуществить только в пределе слабого электрического поля и малой мощности источника Q . В этом пределе функцию распределения можно искать в виде разложения в ряд по степеням малых параметров $\gamma = E/E_{кр}$ и δ , где δ — безразмерный параметр, пропорциональный поглощенной мощности внешнего источника:

$$f = f_M (1 + \gamma \varphi + \delta g + \gamma \delta h + \dots). \quad (3.47)$$

Сопоставляя это разложение с (3.46), видим, что

$$S_0 = S_Q[f_M (1 + \delta g + \dots)] \approx S_Q(f_M); \quad (3.48)$$

$$S_1 = S_Q[f_M (\varphi + \delta h + \dots)] \approx S_Q(f_M \varphi). \quad (3.49)$$

Таким образом, для использования в формуле (3.43) из всего разложения (3.47) необходимо знать только значение $\varphi = \varphi(v)$. Подставим (3.47) в уравнение (3.45) и приравняем члены при нулевой степени малого параметра γ . Тогда увидим, что уравне-

ние для функции $\varphi(\mathbf{v})$ совпадает с уравнением для функции Грина $J_0(\mathbf{v})$. В результате получим $\varphi(\mathbf{v}) = E_{\text{кр}} J_0(\mathbf{v}) / T_e$ и перепишем (3.43) в виде

$$\sigma_1 = \int d^3v \left[\frac{1}{T_e} S_Q(f_M J_0) \frac{\partial J_0}{\partial v} + \frac{1}{E_{\text{кр}}} S_Q(f_M) \frac{\partial J_1}{\partial v} \right]. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.35), (3.36) в (3.50), для НГ-метода генерации тока найдем [37]:

$$j_1 = \sigma_1 E = - \frac{v_1}{|v_1|} \frac{E}{E_{\text{кр}}} \alpha j_0, \quad (3.51)$$

где

$$\alpha = \frac{4}{5 + Z_i} \frac{v_1^4}{v_{Te}^4} + \frac{1}{3 + Z_i} \left(11 + Z_i + \frac{6}{5 + Z_i} \right) \frac{v_1^2}{v_{Te}^2} + \dots, \quad (3.52)$$

а j_0 определено формулой (3.39). В [125] приведены также аналогичные формулы для ЭЦ-метода генерации тока. Там же на основе численного решения кинетического уравнения показано, что линейная зависимость ВЧ-тока от E (3.51) с ростом E становится экспоненциальной:

$$j_Q = j_0 \exp \left[-\alpha \frac{E}{E_{\text{кр}}} \frac{v_1}{|v_1|} \right],$$

причем α слабо зависит от коэффициента квазилинейной диффузии в широком диапазоне его изменения.

Качественно характер зависимости (3.51) можно понять из следующих соображений [57]. При введении в плазму мощности в НГ-диапазоне в области квазилинейного взаимодействия $v_{\parallel} > v_1$ появляется некоторое количество быстрых электронов n_0 , создающих ток $j_0 = -en_0 v_1$. При включении электрического поля ток быстрых частиц меняется по двум причинам. Во-первых, изменяется их количество в области скоростей $v_{\parallel} \approx v_1$ из-за искажения функции распределения электрическим полем:

$$n_1 \propto \exp \left[-\frac{v_1^2}{v_{Te}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{E}{E_{\text{кр}}} \frac{v_1^2}{v_{Te}^2} \right) \right] \approx n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{E}{E_{\text{кр}}} \frac{v_1^4}{v_{Te}^4} \right).$$

Плотность тока изменяется при этом на $\frac{1}{2} j_0 \frac{E}{E_{\text{кр}}} \left(\frac{v_1}{v_{Te}} \right)^4$. Во-вторых, группа быстрых частиц обладает собственной «паднепловой» проводимостью, которую можно оценить как $\sigma_0 = \sigma_S \frac{n_0}{n_e} \left(\frac{v_1}{v_{Te}} \right)^3$. Поэтому электрическое поле помимо тока основного компонента $j_S = \sigma_S E$ создает ток быстрых электронов $\sigma_0 E = j_0 \frac{E}{E_{\text{кр}}} \left(\frac{v_1}{v_{Te}} \right)^2$.

Таким образом, по порядку

$$j_1 = j_0 \frac{E}{E_{\text{кр}}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{v_{Te}} \right)^4 + \left(\frac{v_1}{v_{Te}} \right)^2 \right],$$

что с точностью до числовых множителей совпадает с (3.51), (3.52).

Подчеркнем в заключение, что наведенная проводимость характеризует плазму, поглощающую энергию извне, тогда как в излучающей плазме наведенная проводимость отрицательна из-за обеднения функции распределения быстрыми частицами [6].

3.1.4. Поглощение энергии при генерации тока в плазме с электрическим полем. Выше было установлено, что ток, генерируемый в плазме сторонним источником, зависит от напряженности постоянного электрического поля E , и найдена эта зависимость $j_Q = j_Q(E)$. Аналогично ведет себя и мощность, расходуемая сторонним источником тока при генерации тока. Найдем связь поглощенной мощности p_Q с полем $p_Q = p_Q(E)$. Вообще говоря, обе функции $j_Q(E)$ и $p_Q(E)$ представляют собой разные моменты одной и той же функции распределения и выражают следствие более общей зависимости $f = f(v, E)$. Но поскольку отыскание функции распределения — задача достаточно сложная, ограничимся отысканием менес общих, но весьма ползсных формул.

Соотношение между p_Q и E можно получить, если исходить из предположения о том, что квазилинейный член (3.40), (3.41) в кинетическом уравнении (3.1) является главным. Такое предположение, как правило, выполняется в области $v_1 \leq v_{\parallel} \leq v_2$ при уровне мощности, характерном для НГ-генерации тока в токамаке. Введем безразмерные малые параметры $\varepsilon \propto E/D_{\text{НГ}}$ и $\mu \propto v_0/D_{\text{НГ}}$ и будем, как и ранее, искать решение кинетического уравнения

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + C^{\text{col}}(f) + Q(f) = 0 \quad (3.53)$$

в виде

$$f = f_0 + \varepsilon f_{10} + \mu f_{01} + \varepsilon \mu f_{11} + \dots \quad (3.54)$$

Подставляя (3.54) в (3.53) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε и μ , получаем

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \varepsilon Q(f_{10}) = 0; \quad (3.55)$$

$$C^{\text{col}}(f_0) + \mu Q(f_{01}) = 0. \quad (3.56)$$

Здесь учтено, что $Q(f_0) = 0$.

Запишем удельную поглощенную мощность p_Q как

$$p_Q = \int d^3v \frac{mv^2}{2} Q(f) = \int d^3v S_Q(f) mv, \quad (3.57)$$

что в первом порядке разложения по ε и μ дает

$$p_Q = \int d^3v mv [\varepsilon S_Q(f_{10}) + \mu S_Q(f_{01})]. \quad (3.58)$$

Для НГ-волн первое слагаемое в подынтегральном выражении с помощью (3.55) легко выражается через f_0 , а второе дает мощность p_0 , диссипируемую в плазме в отсутствие электрического поля, что позволяет выразить правую часть в формуле (3.57) через известные величины:

$$p_Q = p_0 - j_0 E. \quad (3.59)$$

Используя определение стационарной эффективности генерации тока

$$\eta = j_Q / p_Q |_{E=0} = j_0 / p_0, \quad (3.60)$$

соотношение (3.59) можно переписать в другой форме:

$$p_Q = j_0 (\eta^{-1} - E). \quad (3.61)$$

В наиболее интересном для дальнейшего случая $j_0 E < 0$ выражения (3.59) и (3.61) представляют сумму двух положительных слагаемых и показывают, что поглощенная ВЧ-мощность расходуется по двум каналам. Первый из них — это столкновительная диссипация энергии пучка быстрых электронов, второй — работа по преодолению силы торможения этих электронов в электрическом поле. Иначе можно сказать, что первая часть поглощенной мощности необратимо тратится на нагрев плазмы, а вторая часть обратимым образом переходит в энергию полоидального магнитного поля. Формулу (3.59) можно получить, если проинтегрировать кинетическое уравнение (3.53) с весом $mv^2/2$ по той области пространства скоростей, в которой отличен от нуля источник $Q(f)$, и предположив при этом, что функция распределения не искажается электрическим полем. Такой результат показывает, что применимость соотношений (3.59), (3.61) не ограничивается только НГ-методом генерации тока, а с большей или меньшей справедливостью распространяется на другие методы.

3.2. Динамика полного тока в токамаке

3.2.1. Система уравнений для тока плазмы. Характерные времена. Выведем систему уравнений, описывающую динамику изменения тока в токамаке со сторонним неиндукционным источником тока. Как уже было отмечено в гл. 1, одним из этих уравнений служит закон электромагнитной индукции Фарадея. Запишем этот закон для некоторого замкнутого контура, лежащего на ограничивающей плазму магнитной поверхности и охватывающего главную ось тора:

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = U. \quad (3.62)$$

Здесь U — напряжение на плазменном витке, а Ψ — поток магнитной индукции через произвольную поверхность, ограниченную выбранным контуром. Полный поток Ψ внутри этого контура складывается из потока, обусловленного током плазмы I , и потока от

обмоток индуктора и управляющих обмоток Ψ_{ext} :

$$\Psi = \frac{1}{c} LI + \Psi_{\text{ext}}. \quad (3.63)$$

Соответственно (3.62) можно переписать так:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (LI) + U = U_{\text{ext}}. \quad (3.64)$$

Для последующих оценок будем считать распределение плотности тока j и напряженности электрического поля E в плазме однородным, т. е. $I = \pi a^2 j$ и $U = 2\pi R_0 E$. В этих предположениях для токамака с воздушным индуктором можно записать $L = 4\pi R_0 \ln(8R_0/a - 3/2)$. Отбрасывая пока член, обусловленный обмотками индуктора и равновесия, перепишем закон Фарадея как

$$l \frac{dj}{dt} = - \frac{e^2 n_e}{m} E. \quad (3.65)$$

Здесь безразмерный коэффициент l , равный

$$l = \frac{a^2 \omega_{pe}^2}{2c^2} \ln \left(\frac{8R_0}{a} - \frac{3}{2} \right), \quad (3.66)$$

имеет для токамака порядок $10^2 - 10^6$ и показывает, во сколько раз индуктивная энергия переносимого электронами тока больше их кинетической энергии.

Вторым уравнением, связывающим величины j и E , является закон Ома. Для плазмы с внешним источником тока (3.31) этот закон был получен в § 3.1 путем формального преобразования кинетического уравнения. Здесь вновь выведем закон Ома другим методом с тем, чтобы нагляднее установить происхождение и качественный смысл отдельных его слагаемых. С этой целью запишем электронное кинетическое уравнение (3.1) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + C^{\text{col}}(f) + Q(f) \quad (3.67)$$

и проинтегрируем его по скоростям с весом $-ev_{\parallel}$, разбив все фазовое пространство на три области Ω , Q и R , где R — область убегания, Q — область, в которой отличен от нуля неиндукционный источник тока $Q(f)$, Ω — остальная часть пространства скоростей;

$$\frac{\partial j_{\Omega}}{\partial t} = \frac{e^2 E}{m} n_{\Omega} - v_{ei} j_{\Omega}; \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial j_Q}{\partial t} = \frac{e^2 E}{m} n_Q - v_Q j_Q - \frac{en_Q}{m} F_Q; \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial j_R}{\partial t} = \frac{e^2 E}{m} n_R - v_R j_R + ec \frac{\partial n_R}{\partial t}. \quad (3.70)$$

Здесь n_Q — плотность частиц в области Q , j_Q — создаваемая ими плотность тока, ν_Q — средняя частота столкновений этих частиц с остальными электронами. Величины n_R , j_R и ν_R — аналогичные характеристики области убегания. Уравнение (3.68) описывает плотность тока j_Ω основной группы частиц с плотностью n_Ω . Во всех уравнениях (3.68) — (3.70) слагаемые в правой части выражают интегралы от соответствующих слагаемых в правой части кинетического уравнения (3.67). Последнее слагаемое в (3.70) уже обсуждалось в конце § 3.1 — оно возникает как поток убегающих электронов через некоторую поверхность в пространстве скоростей. Для простоты предположили, что все убегающие электроны имеют скорость, равную скорости света c .

Сразу отметим, что система (3.68) — (3.70) носит качественный характер, и в дальнейшем она используется только для интерпретации роли отдельных групп частиц, которые сильно отличаются одна от другой по количеству, столкновительности и другим кинетическим характеристикам. Специфику поведения разных групп частиц необходимо учитывать при постановке задач и интерпретации результатов. В то же время для решения большинства задач по динамике тока в токамаке нужно знать только полную плотность тока $j = j_\Omega + j_Q + j_R$ как функцию параметров $j = j(E, p_Q)$ (здесь p_Q — удельная поглощенная мощность стороннего источника тока Q). Уравнение для полной плотности тока j получим, сложив уравнения (3.68) — (3.70):

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{e^2 n_e}{m} E - \nu_{ei} j - \frac{en_Q}{m} F_Q + ec \frac{\partial n_R}{\partial t}, \quad (3.71)$$

где

$$\nu_{ei} = (\nu_{ei} j_\Omega + \nu_Q j_Q + \nu_R j_R) / j \quad (3.72)$$

— эффективная частота столкновений; $n_e = n_\Omega + n_Q + n_R$ — плотность электронного компонента плазмы.

Левая часть уравнения (3.71) описывает изменение плотности тока, связанное с перестройкой электронной функции распределения. Для выяснения роли этого слагаемого сравним уравнение (3.71) с уравнением (3.65). Из такого сравнения ясно, что первое слагаемое в правой части уравнения (3.71) в $l \approx 10^2 \div 10^6$ раз больше левой части этого уравнения. Тем самым левая часть (3.71) всегда пренебрежимо мала, и ее можно отбросить. Это означает, что плотность тока, а следовательно, и полный ток в токамаке могут заметно измениться только за время масштаба скин-слоя. Любая попытка изменить плотность тока j за более короткое время приводит к возникновению индукционного электрического поля, под действием которого функция распределения электронов деформируется таким образом, чтобы j оставалась постоянной. Последний вывод не относится к каждой из составляющих плотности тока j_Ω , j_Q и j_R . Эти величины могут меняться за

время масштаба времени столкновений или быстрее, если это изменение связано с внешней вынуждающей силой.

В качестве примера рассмотрим в общих чертах процессы, происходящие при создании в плазме тока с помощью внешнего источника НГ-волн. При этом не будем пока учитывать убегающие электроны. Включение источника НГ-волн за очень малое время (в рамках нашей системы уравнений — мгновенно) образует плато на функции распределения и создает некоторое значение $j_Q(t=0)$. Одновременно возникает электрическое поле $E(t=0)$, такое, чтобы создать плотность тока $j_Q(t=0) = \sigma_S E(t=0) = -j_Q(t=0)$ основной массы электронов, полностью компенсирующей j_Q . Далее происходит уже более длительный, но все еще достаточно быстрый процесс повышения уровня квазилинейного плато на функции распределения до стационарного состояния, соответствующего $j_Q(t=\infty)$. Из уравнения (3.69) видно, что характерное время этого процесса ν_Q^{-1} — обратная частота столкновений, вычисленная по минимальной фазовой скорости волн ν_1 . Время ν_Q^{-1} , как правило, в 20—30 раз превышает время ν_{ei}^{-1} столкновений тепловых частиц. Подъем тока j_Q от значения $j_Q(t=0)$ до $j_Q(t=\infty)$ сопровождается возрастанием электрического поля от $j_Q(t=0)/\sigma_S$ до $j_Q(t=\infty)/(\sigma_S + \sigma_1)$, при одновременной перестройке проводимости. Параллельно идет диссипация электрического поля с характерным временем $\tau_{ск}$. Скиновое время $\tau_{ск}$ еще по крайней мере в десятки раз превышает время ν_Q^{-1} .

Само понятие скинового времени в рассматриваемой сильно немаксвелловской плазме требует некоторого уточнения. Если исключить напряженность электрического поля E из системы уравнений (3.65), (3.71), то увидим, что процесс установления j носит экспоненциальный характер с показателем экспоненты $-\nu_{ef}t/l$. Хотя мы игнорировали тот факт, что два последних слагаемых в (3.71) зависят от E , но даже такая простая оценка для скинового времени $\tau_{ск} = l/\nu_{ef}$ показывает, что время изменения плотности тока в плазме определяется средней столкновительностью всех частиц, переносящих токи (3.72). Эта частота столкновений ν_{ef} характеризует время диссипации энергии электрического тока в плазме и в условиях, при которых происходит генерация тока, может заметно отличаться от частоты электрон-ионных соударений ν_{ei} . Соответственно реальное скиновое время будет превышать скиновое время, рассчитанное по спитцеровской проводимости.

Процессы, протекающие на временах масштаба скиновых, будут главным объектом последующего рассмотрения. Поэтому все перестройки функции распределения и другие изменения, происходящие за столкновительное время, в интересующем нас временном масштабе можно считать мгновенными. Этому соответствует переход от кинетического уравнения (3.67) или системы (3.68) — (3.70) к уравнению (3.71). В этом уравнении, как уже говорилось, левая часть мала по сравнению с первым слагаемым в правой ча-

сти, что позволяет переписать (3.71) в виде

$$j = \frac{e^2 n_e}{m \nu_{ef}} E - \frac{en_Q}{m \nu_{ef}} F_Q + \frac{ec}{\nu_{ef}} \frac{\partial n_R}{\partial t}. \quad (3.73)$$

Это уравнение служит законом Ома в плазме с дополнительным источником тока. В отсутствие убегающих электронов оно совпадает с (3.31). Для записи уравнения (3.73) в традиционной форме закона Ома (3.40) нужно из второго слагаемого в правой части (3.73) выделить линейную по E часть и объединить ее с первым слагаемым. Такая процедура была уже проделана в § 3.1, поэтому в дальнейшем будем использовать полученные в нем результаты. Если не интересоваться деталями радиального распределения плотности тока по сечению плазменного шнура, то система уравнений (3.65), (3.73) или (3.65), (3.31) полностью определяет динамику изменения тока в токамаке при условии, что известны плотность n_e , температура T_e и другие параметры плазмы.

3.2.2. Влияние наведенной проводимости на подъем тока в токамаке. В последнее время большое внимание как в экспериментальных [149—152], так и теоретических работах [55, 56, 146, 153] уделялось изучению подъема тока в токамаке, а также перемагничиванию индуктора безындукционными методами. Рассмотрим подробнее эти две тесно связанные между собой задачи. Оба процесса сопровождаются появлением в плазме индукционного электрического поля, ускоряющего электроны в направлении, противоположном направлению их средней токовой скорости. Это следует из закона электромагнитной индукции Фарадея для плазменного витка. Перепишем его, перейдя из гауссовой системы единиц, которой мы пользовались до сих пор, в систему СИ:

$$L \frac{dI}{dt} + U = U_{\text{ext}}. \quad (3.74)$$

Умножив уравнение (3.74) на полный ток плазмы I , запишем его в «энергетической» форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2} = IU_{\text{ext}} - IU$$

или

$$dW_I/dt = P_{\text{ext}} + P_{\text{el}}, \quad (3.75)$$

где $W_I = LI^2/2$ — запас энергии в полоидальном магнитном поле; P_{ext} — мощность, связанная с работой внешних устройств, обеспечивающих питание токовых обмоток, и, наконец, $P_{\text{el}} = -IU$ — полный поток энергии из плазмы в полоидальное поле. Если в токамаке осуществляется подъем тока без помощи индуктора и других источников вихревого поля (т. е. $P_{\text{ext}} = 0$), то $\dot{W}_I = -IU > 0$, причем величина $-IU$ дает ту долю мощности стороннего источника тока в плазме, которая идет на накопление индуктивной энергии магнитного поля. Если же токамак работает в режиме перемагничивания индуктора, то $\dot{W}_I = 0$ и $P_{\text{ext}} = IU < 0$ — мощность, поглощаемая в обмотке индуктора.

Из сказанного ясно, что мерой эффективности динамических процессов, таких, как перемагничивание индуктора или подъем тока в токамаке, служит отношение P_{el} к полной поглощенной в плазме мощности стороннего источника тока P_Q :

$$\eta_{el} = -IU/P_Q = P_{el}/P_Q. \quad (3.76)$$

Для того чтобы найти это отношение, используем закон Ома, отбросив пока эффекты, связанные с убегающими электронами. В этом случае закон Ома (3.73) принимает вид (3.41). Удобнее переписать формулу (3.41) для полного тока I :

$$I = I_0 + U/R_s + U/R_1, \quad (3.77)$$

где

$$I_0 = \pi a^2 j_0; R_s = 2R_0/(a^2 \sigma_s); R_1 = 2R_0/(a^2 \sigma_1), \quad (3.78)$$

а j_0 и σ_1 определены формулами (3.39) и (3.43). Умножим (3.77) на $-U$, чтобы найти P_{el} :

$$P_{el} = -I_0 U - U^2/R_s - U^2/R_1. \quad (3.79)$$

Теперь видно, что на самом деле сторонний источник, создающий в плазме ток I_0 , отдает электрическому полю мощность $-I_0 U$, бóльшую, чем реально идет на увеличение W_I . Часть мощности $U^2/R_s + U^2/R_1$ диссипируется в плазме, при этом доля, равная первому слагаемому U^2/R_s , прямо не связана с конкретным методом генерации тока и определяется только температурой и эффективным зарядом плазмы. Другая доля потеря, равная U^2/R_1 , неизбежно присуща данному методу генерации, поэтому ее естественно объединить с первым слагаемым в правой части (3.79). Подставив теперь (3.79) в (3.76), получим, что эффективность преобразования энергии внешнего источника тока (например, ВЧ-волн) в энергию поля тока плазмы представима в виде «идеальной» эффективности для данного метода генерации тока η_Q за вычетом доли потерь, сопутствующих любому методу генерации и связанных с джоульским тепловыделением в плазме со спитцевской проводимостью:

$$\eta_{el} = \eta_Q - \eta_s, \quad (3.80)$$

где

$$\eta_Q = -\frac{I_0 U + U^2/R_1}{P_Q}; \quad (3.81)$$

$$\eta_s = U^2/(R_s P_Q). \quad (3.82)$$

Преобразование энергии в плазме со сторонним источником тока иллюстрируется схемой, показанной на рис. 3.3. Здесь полная энергия системы представлена в виде суммы трех энергетических резервуаров. Два из них W_T и W_Q здесь предполагаются стационарными, а третий, W_I , изменяющийся наиболее медленно, может накапливать энергию (на схеме он выделен штриховой линией). В режиме подъема тока вся поступающая в систему мощность расходуется по двум каналам: dW_I/dt — обратимое уве-

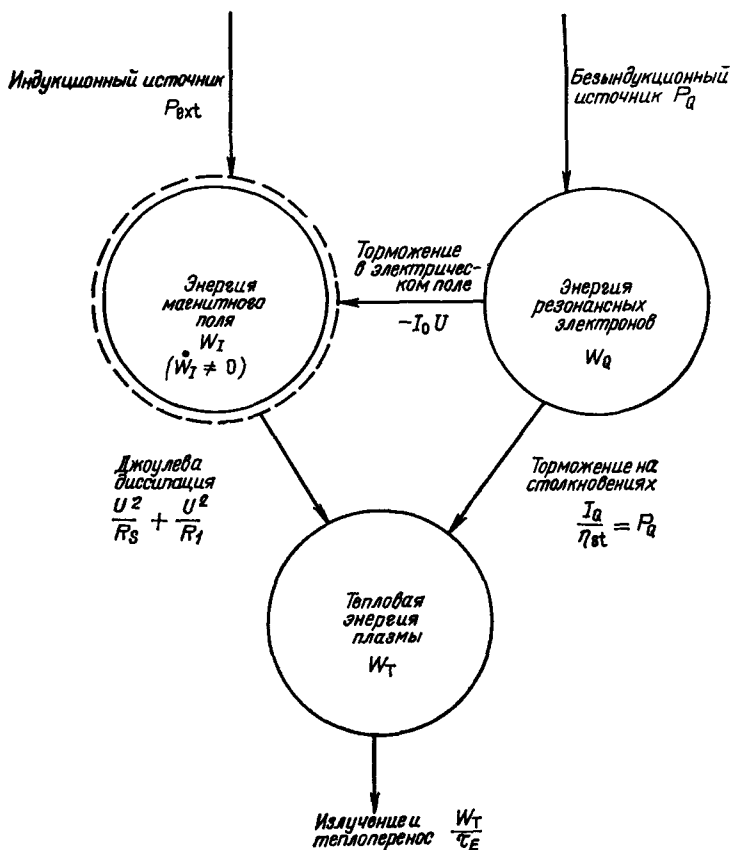


Рис. 3.3. Схема преобразования энергии безындукционного источника тока мощностью P_Q

личение индуктивной энергии и W_T/τ_E — необратимые потери на нагрев диафрагмы и стенок камеры. В режиме перемagnичивания индуктора $dW_I/dt=0$, а P_{ext} меняет знак, и полезной оказывается та доля поглощенной мощности P_Q , которая идет во внешнюю цепь. Таким образом, в обоих случаях стоит задача минимизации тепловых потерь на стенки W_T/τ_E . Как видно из рис. 3.3, на первом этапе преобразования энергии эта задача сводится к увеличению отношения $(-I_0 U)/(I_0/\eta_{st}) = -\eta_{st} U$, так что помимо естественного пути — выбора метода генерации тока с максимальной стационарной эффективностью η_{st} — остается еще только одна возможность — увеличение напряжения обхода U . Однако, проследив дальнейшее превращение энергии, видим, что с ростом U возрастает джоулева диссипация и могут возникнуть дополнительные ограничения. Это означает, что необходимо исследовать зависимость η_{el} (3.80) от U и других параметров задачи. Найдем

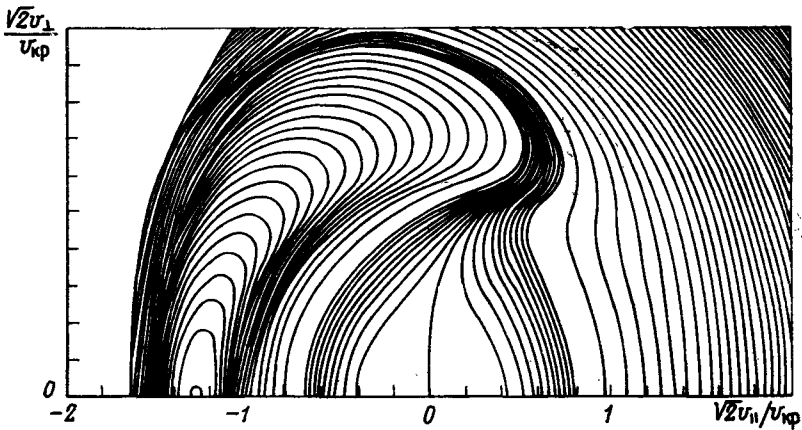


Рис. 3.4. Линии уровня безразмерной функции $2w/(mv_{кр}^2)$ на плоскости переменных $\sqrt{2}v/v_{кр}$. Наружные контуры даны с шагом 0,05, внутренние — с шагом 0,005 [146]

сначала максимальную эффективность данного метода генерации η_Q (3.81), вновь используя методику функции Грина [146].

Построим функцию отклика для величины $P_{el} = -IU$. В § 3.1 была найдена функция отклика J для плотности тока j . Поскольку P_{el} представляет собой результат умножения j на объем плазмы $V = 2\pi^2 a^2 R_0$ и на напряженность электрического поля, то и искомую функцию отклика можно получить из J домножением на такой же множитель. Введем промежуточную величину

$$\omega(\mathbf{v}) = -EJ(\mathbf{v}). \quad (3.83)$$

Определенная соотношением (3.83), величина $\omega(\mathbf{v})$ имеет наглядный физический смысл. Это энергия, которую отдаст внешнему электрическому полю E электрон, имевший в начальный момент времени скорость \mathbf{v} . Подставив (3.35), (3.36) в (3.32), можно с помощью (3.83) получить представление функции отклика $\omega(\mathbf{v})$ в области скоростей $v_{Te}^2 \ll v^2 \ll v_{Te}v_{кр}$.

В общем случае функцию $\omega(v)$ приходится рассчитывать численно. На рис. 3.4 показаны линии уровня функции ω для случая $Z_i = 1$, $v^2 \gg v_{Te}^2$.

С помощью ω суммарный поток энергии в полоидальное поле P_{el} выражается соотношением, аналогичным (3.31):

$$P_{el} = V \int d^3v [S_Q(f) - (eE/m) f_M e_{\parallel}] \partial\omega/\partial v. \quad (3.84)$$

Тепловые потери, связанные со спитцеровской частью проводимости, составляют

$$U^2/R_S = (eEV/m) \int d^3v f_M \partial\omega/\partial v_{\parallel}.$$

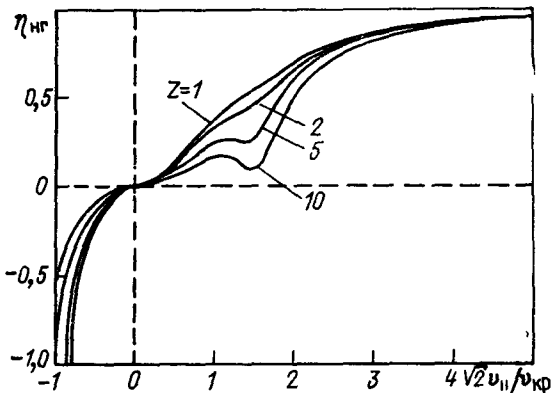


Рис. 3.5. Эффективность преобразования энергии безындукционного источника НГ-волн в энергию полоидального магнитного поля как функция безразмерной скорости резонансных частиц $\sqrt{2} v_{||}/v_{кр}$ для разных значений Z_i . При $\sigma_i \gg \sigma_s$ значение $\eta_{нр}$ совпадает с η_{el} [146]

Выделим из P_{el} вклад, связанный с конкретным методом генерации тока:

$$P_Q = V \int d^3v S_Q(f) \partial\omega/\partial v. \quad (3.85)$$

Эффективность преобразования энергии внешнего источника в индуктивную энергию полоидального поля, характеризующая данный метод генерации тока, выражается формулой

$$\eta_Q = \left(\int d^3v S_Q \partial\omega/\partial v \right) / \int d^3v S_Q m v. \quad (3.86)$$

Как и в § 3.1, легко получить оценку для эффективности η_Q в случае узкого спектра или малой мощности волн. Так, для НГ-волн, считая $v_{||} \approx v$, из (3.86) находим:

$$\eta_Q \approx \frac{1}{m v_{||}} \frac{\partial\omega}{\sigma v_{||}} \approx \frac{1}{m v} \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial \mathcal{E}}, \quad (3.87)$$

где $\mathcal{E} = mv^2/2$ — энергия электрона. В диапазоне скоростей $v_{Te} \ll v^2 \ll v_{Te} v_{кр}$ для η_Q можно получить аналитическое выражение

$$\eta_Q = \frac{8}{5 + Z_i} \frac{v^2}{v_{кр}^2} \left(1 - \frac{5 + Z_i}{3 + Z_i} \frac{v^2}{v_{кр}^2} + \dots \right).$$

Важно отметить, что значение η_Q зависит только от безразмерных параметров $v/v_{кр}$ и Z_i . Это позволяет, решив несколько раз для разных Z_i уравнение Спитцера — Хэрма (3.30), затабулировать функцию η_Q с тем, чтобы в транспортных и других расчетах существенно сэкономить машинное время. Такая табуляция проведена в [146]. На рис. 3.5 и 3.6 представлены графические зависимости η_Q от $v_{||}/v_{кр}$ для НГ- и ЭЦ-методов генерации тока. Отрицательные значения η_Q означают, что поглощаемой в плазме мощностью внешнего источника тока недостаточно не только для подбема тока, но и для его поддержания. Естественно, что при этом ток плазмы падает, а направление индуцированного электрического поля и потока энергии меняет знак. Изложенная тео-

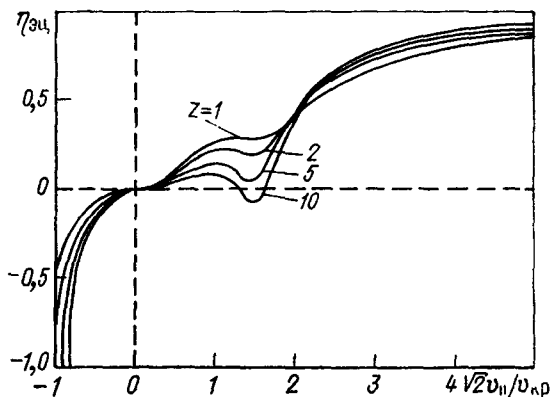


Рис. 3.6. Эффективность преобразования энергии ЭЦ-волн в энергию полоидального поля [146]

рия, созданная в [146, 153], продемонстрировала блестящее совпадение с экспериментом. Например, в [154] собраны точки более чем 250 экспериментальных разрядов установки PLT, которые в интервале $-v_{кр} < v_{||} < 2v_{кр}$ очень хорошо легли на кривую $\eta_{НГ}$ рис. 3.5 при $Z_i=5$. Зависимости, представленные на рис. 3.5, подтверждены также рядом других экспериментальных работ по генерации тока НГ-волнами.

3.2.3. Влияние убегающих электронов на подъем тока в токамаке. Рассмотрим теперь эффекты, обусловленные ролью убегающих электронов. Эти эффекты довольно разнообразны и в настоящее время изучены явно недостаточно. В большинстве своем они оказывают отрицательное воздействие на генерацию тока: снижается эффективность поддержания тока и эффективность преобразования энергии безындукционного источника тока в энергию полоидального поля, увеличивается время переходных процессов. Поэтому в реальных условиях всегда следует следить за тем, чтобы убегающие электроны не образовывались в большом количестве. Для этого необходимо либо выбрать такой режим работы токамака, чтобы скорость образования пучка ускоренных электронов была невелика, либо принимать специальные меры по уменьшению времени жизни этой группы частиц.

Влияние убегающих электронов на подъем тока (или перемagnичивание индуктора) в токамаке можно понять на основе уравнений (3.71) или (3.73). Поскольку доля убегающих электронов в плазме токамака всегда мала, $n_R \ll n_0$, их вкладом в первое слагаемое в правой части (3.71) можно пренебречь. В следующем слагаемом количество убегающих электронов пропорционально уже не плотности n_R , а току j_R и может быть значительным, так как все эти электроны имеют скорость масштаба скорости света. Если заметная часть тока переносится убегающими электронами, то эффективная частота столкновений падает. Из закона Ома

(3.63) видно, что при этом падает электрическое поле E — убегающие электроны своей высокой проводимостью шунтируют плазменный виток. В результате падает поток энергии из плазмы в полоидальное магнитное поле $P_{el} = -IU$ и увеличивается время подъема тока. Поскольку этот эффект пропорционален плотности тока, переносимого убегающими электронами, избавиться от него можно двумя путями: уменьшить скорость ухода электронов в режим ускорения; или уменьшить время жизни этих частиц. Однако, как было показано в [155], существует еще один эффект, связанный с убегающими электронами, который делает второй путь снижения их доли непродуктивным и определяется последним слагаемым в правых частях уравнений (3.70) и (3.71). Это слагаемое показывает, что достаточно большой поток убегания $\partial n_R / \partial t$ вызывает соответствующий вклад в $\partial j_R / \partial t$. Но, как известно, полное значение j из-за индуктивных эффектов измениться не может, следовательно, изменяется (падает) напряжение обхода, что нежелательно как в режиме подъема тока в плазме, так и в режиме перемагничивания индуктора. Уменьшение времени жизни убегающих электронов не уменьшает эти нежелательные последствия.

Дадим количественное описание указанных выше эффектов.

В [146] показано, что, используя для генерации тока волны с фазовыми скоростями v_ϕ в диапазоне $-0,7v_{кр} < v_\phi < v_{кр}$, можно избежать влияния внешнего источника тока на скорость ухода электронов в режим убегания. Воспользуемся для этой скорости формулой из [155]:

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} n_e v_0 \left(\frac{E_{кр}}{E} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_{кр}}{4E} - \sqrt{\frac{2E_{кр}}{E}} \right). \quad (3.88)$$

Здесь выражение в показателе экспоненты получено в ранних аналитических работах [148], а предэкспоненциальный фактор выбран так, чтобы давать наилучшее приближение к численным расчетам. Введем обозначение

$$l_H = -ec \frac{\partial n_R}{\partial t} / \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (3.89)$$

тогда уравнение (3.71) с учетом (3.70) можно переписать в виде

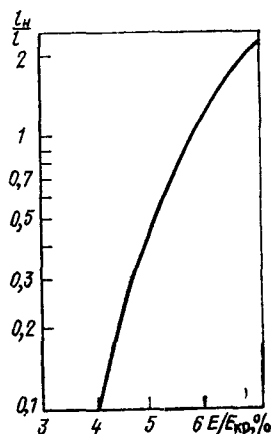
$$\frac{l}{v_{ef}} \left(1 + \frac{l_H}{l} \right) \frac{\partial j}{\partial t} + j = -\frac{en_Q F_Q}{mv_{ef}}, \quad (3.90)$$

откуда ясно, что равенство (3.89) определяет величину, которую можно назвать нелинейной индуктивностью плазменного шнура. С помощью (3.88) и (3.65) перепишем (3.89) так:

$$\frac{l_H}{l} = \frac{4c}{\pi v_{Te}} \left(\frac{E_{кр}}{E} \right)^{5/2} \exp \left(-\frac{E_{кр}}{4E} - \sqrt{\frac{2E_{кр}}{E}} \right). \quad (3.91)$$

Очевидно, что эта величина и определяет критерий необходимости учета обсуждаемого эффекта. График l_H/l показан на рис. 3.7.

Рис. 3.7. Нормированная нелинейная индуктивность плазменного шнура (3.91), обусловленная убегающими электронами, в зависимости от электрического поля $E/E_{кр}$, при электронной температуре $T_e=1$ кэВ



Из него видно, что при $E/E_{кр} \leq 4\%$ нелинейная индуктивность мала, а уже при $E/E_{кр} > 5\%$ возникает эффект порядка единицы. Из уравнения (3.90) виден физический механизм рассматриваемого явления. Внешняя сила, описываемая правой частью уравнения, ускоряет электроны в направлении, противоположном силе, действующей на них со стороны индукционного электрического поля. Тормозясь, эти электроны отдают энергию электрическому полю, которое, в свою очередь, тратит эту энергию на ускорение бесстолкновительных электронов убегающего пучка. Полный ток плазмы при этом не возрастает. Ввиду сильной нелинейности этот механизм приводит к абсолютному ограничению эффективности подъема тока на уровне 35% [155].

Два разобранных выше эффекта в электротехнических терминах сводятся к следующему. Первый эффект обусловлен большим количеством убегающих электронов. Из-за их низкой столкновительности он увеличивает проводимость плазмы. При достаточно хорошем удержании ускоренных электронов этот эффект может представлять реальную опасность уже при $E/E_{кр} \geq 1\%$ [153], однако от него можно избавиться путем уменьшения времени жизни ускоренных электронов. Так как высокая проводимость включается только по мере накопления убегающего пучка, то в течение короткого времени $\tau < \tau_R = v_{кр}^3 / (v_0 v_{Te}^3)$ электрическое поле может быть достаточно большим. В этом случае первый эффект имеет отдаленные во времени последствия. В отличие от него второй эффект обладает практически мгновенным откликом на увеличение электрического поля. Этот эффект вызван большим потоком электронов в область убегания, и с электротехнической точки зрения он приводит к увеличению индуктивности плазменного витка. В результате возникает абсолютное ограничение напряженности электрического поля на уровне $E/E_{кр} \leq 4\%$.

Для строгого рассмотрения описанных явлений необходимо, конечно, учесть релятивистских эффектов [132]. Кроме того, появление убегающих электронов часто сопровождается развитием всеерной неустойчивости [25]. Неустойчивость приводит к ряду интересных явлений; например, она прекращает убегание электронов и снижает ограничение на эффективность [155]. Однако обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящего обзора. Ознакомиться с этой проблемой можно по оригинальным работам [25, 27, 156, 157].

3.2.4. Влияние нагрева на подъем тока в токамаке. Продолжим исследование эффективности преобразования энергии безындукционного источника тока в плазме в индукционную энергию полоидального магнитного поля. Эта эффективность определяется формулой (3.76), из которой видно, что для увеличения эффективности преобразования энергии при данном токе I и данной поглощенной мощности следует увеличивать напряжение обхода U . С другой стороны, в предыдущем пункте было показано, что параметр $E/E_{кр}$ не должен превышать 4—5%, иначе эффективность начнет падать из-за появления ускоренных электронов. Таким образом, напряжение обхода $U = 2\pi R_0 E$ можно повышать, только увеличивая $E_{кр} \propto n_e/T_e$. В реальных условиях токамака, когда вводимая мощность фиксирована, T_e нельзя считать независимой величиной. Температура должна определяться самосогласованно из энергобаланса электронного компонента плазмы. Вторая величина, входящая в $E_{кр}$, — плотность плазмы n_e контролируется процессами, слабо связанными с мощностью P_Q , поэтому плотность можно считать свободным параметром задачи.

Помимо приведенных соображений, связанных с $E_{кр}$, можно привести и другие аргументы в пользу увеличения рабочей плотности n_e . Так, в п. 3.2.2 была исследована величина η_Q (3.81), которая совпадает с η_{e1} (3.80), если спитцеровская проводимость плазмы мала по сравнению с наведенной проводимостью σ_1 . Было показано, что в тех методах генерации тока, которые основаны на ускорении электронов со скоростью $v \gg v_{Te}$, эффективность преобразования энергии зависит от безразмерного параметра $v/v_{кр}$, не считая слабой зависимости от Z_i . Значение $v_{кр}$, в свою очередь, зависит от отношения n_e/E . Поэтому, увеличивая плотность n_e , казалось бы, можно увеличивать напряжение обхода, не снижая значения η_Q . Однако здесь вновь следует вспомнить, что напряжение обхода U , так же как и температура электронов T_e , не является независимой величиной, а определяется законом Ома для плазменного шнура (3.77), в который кроме мощности источника P_Q и тока I входят еще плотность плазмы и температура. Кроме того, с увеличением плотности может нарушиться условие $\eta_s \ll \eta_Q$ [см. (3.80) — (3.82)], так как отношение R_1/R_s возрастает с ростом n_e : $R_1/R_s \propto n_e$. Например, для НГ-метода генерации тока из (3.50) легко получить

$$\frac{R_s}{R_1} = \alpha \frac{j_0}{en_e v_{Te}} \approx \frac{\alpha}{30} \frac{1}{n_{13} \sqrt{T_1}},$$

где T_1 — температура, кэВ; n_{13} — плотность, 10^{13} см^{-3} ; α — величина, зависящая от спектра волн и примерно равная 50. Таким образом, при $n_e > 10^{13} \text{ см}^{-3}$ уже следует учитывать вклад слагаемого η_s в полную эффективность η_{e1} (3.80).

Сформулируем теперь полную систему уравнений, на основе которой можно исследовать зависимость «внутренних» характеристик плазменного шнура, таких, как ток I , напряжение обхода

да U , температура T_e , сопротивление R_1 и R_s , от «внешнего» параметра P_Q — поглощенной в плазме мощности источника тока. Прежде всего запишем уравнение баланса энергии в группе электронов, взаимодействующих с внешним источником. Это уравнение было получено в п. 3.1.5 в локальной форме (3.59). Умножив (3.59) на объем плазмы V , найдем

$$P_Q = P_0 - I_0 U. \quad (3.92)$$

Здесь P_Q — полная поглощенная мощность; I_0 — ток группы взаимодействующих с внешним источником частиц, P_0 — мощность, теряемая на столкновениях этой группы частиц с остальными частицами плазмы.

Выразим P_0 через стационарную (рассчитанную при $E=0$) эффективность генерации тока:

$$P_0 = I_0 / \eta_{st}, \quad (3.93)$$

где η_{st} отличается от ранее введенной удельной эффективности $\eta = j_0 / P_0$ (3.60) нормировкой на полный объем плазмы

$$\eta_{st} = \eta / (2\pi R_0). \quad (3.94)$$

Отметим, что при таком определении знак η_{st} зависит от выбора системы координат и может быть отрицательным, если $I_0 < 0$.

Уравнения (3.92), (3.93) описывают баланс энергии в малочисленной группе электронов, взаимодействующих с внешним источником (см. рис. 3.3). Для тепловой энергии всей плазмы в целом W_T запишем обычное соотношение

$$dW_T/dt = P_Q + IU - W_T/\tau_E, \quad (3.95)$$

включив в последнее слагаемое все виды теплопроводностных и излучательных потерь. Обычно в токамаке энергетическое время τ_E существенно меньше скин-времени $\tau_{ск}$. Это позволяет в дальнейшем отбросить временную производную в уравнении (3.95) и приравнять правую часть нулю. Из (3.95) видно, что затраченная источником тока мощность P_Q идет либо на нагрев плазмы (для генерации тока это бесполезные потери), либо отдается электрическому полю. Возможны две постановки задачи: первая — повышение эффективности преобразования энергии η_{el} — требует определения условий максимума отношения $-IU/P_Q$; вторая, в которой максимизируется U , указывает пути повышения скорости подъема тока dI/dt и скорости перемагничивания индуктора P_{ext} .

Выпишем полную систему уравнений для температуры плазмы $T_e = T_i$, тока I и напряжения обхода U :

$$dW_I/dt - P_{ext} = -IU; \quad (3.96)$$

$$P_Q = W_T/\tau_E - IU; \quad (3.97)$$

$$P_Q = (U/R - I)(U - 1/\eta_{st}). \quad (3.98)$$

Здесь $R = R_1 R_s / (R_1 + R_s)$, а величина I_0 исключена из (3.92) с помощью закона Ома (3.77) и (3.93). В качестве независимых параметров в эту систему входят плотность плазмы n_e и поглощен-

ная мощность P_Q . Заметим, что в сформулированных выше задачах оптимизации нас интересует не сама зависимость тока от времени $I(t)$, а возможность управления величиной dI/dt при данном значении I . Поэтому первое из уравнений системы можно отбросить, считая ток плазмы I заданным. После этого остается два алгебраических уравнения для температуры T_e и напряжения U как функций трех переменных n_e , I и P_Q .

Решим уравнение (3.98) относительно U и представим результат в виде

$$-IU = \frac{2P_R(P_Q - P_Q^{\text{St}})}{\sqrt{(P_Q^{\text{St}} - P_R)^2 + 4P_Q P_R + R_R + P_Q^{\text{St}}}}, \quad (3.99)$$

где

$$P_Q^{\text{St}} = I/\eta_{\text{st}}; \quad P_R = RI^2; \quad (3.100)$$

P_Q^{St} — мощность, необходимая стороннему источнику тока для стационарного поддержания тока I ; P_R — мощность, необходимая для индукционного поддержания этого тока. Для большинства методов генерации $P_R < P_Q^{\text{St}}$. На рис. 3.8 схематически показана зависимость величины $P_{\text{el}} = -IU$ от P_Q . Видно, что при малых P_Q величина P_{el} отрицательна. Это означает, что ток I поддерживается за счет накопленной индуктивной энергии. При $P_Q > P_Q^{\text{St}}$ мощность внешнего источника превышает уровень, требуемый для поддержания данного тока I , и избыточная мощность идет на подъем тока и увеличение W_I . При $P_Q = P_Q^{\text{opt}}$ выполнено условие

$$\frac{\partial \eta_{\text{el}}}{\partial P_Q} = \frac{\partial}{\partial P_Q} \left(\frac{-IU}{P_Q} \right) = 0. \quad (3.101)$$

Эффективность преобразования энергии η_{el} достигает максимума $\eta_{\text{el}}^{\text{opt}}$ и далее начинает падать. Скорость накопления магнитной энергии P_{el} еще продолжает расти, пока P_Q не достигнет значения P_Q^* , определяемого условием

$$\partial U / \partial P_Q = 0. \quad (3.102)$$

Вообще говоря, функция $P_{\text{el}}(P_Q)$ может оказаться монотонно возрастающей, тогда условие (3.102) не выполняется, а скорость подъема тока монотонно растет с вложенной мощностью. Что касается условия (3.101), то из (3.99) видно, что оптимальная эффективность $\eta_{\text{el}}^{\text{opt}}$ всегда существует. Вторая кривая на рис. 3.8 показывает зависимость тепловых потерь W_{T/τ_E} от поглощенной мощности.

Дальнейшие результаты получены для НГ-метода генерации тока [56]. В этом случае эффективность стационарного поддержания тока определяется формулой (3.94) и не зависит от температуры плазмы, а сопротивление плазменного шнура можно получить из (3.50) и формулы для спитцеровской проводимости. Теперь заметим, что $\partial U / \partial P_Q = (\partial U / \partial T_e) (\partial T_e / \partial P_Q)$, причем второй множитель, как правило, в нуль не обращается. (Исключением

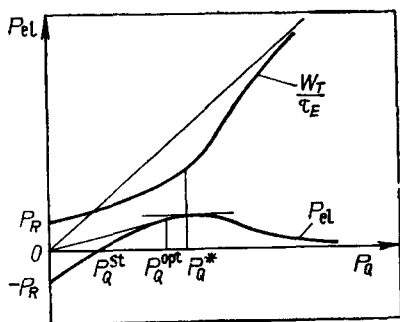


Рис. 3.8. Зависимость тепловых потерь W_T/τ_E и скорости изменения энергии полоидального магнитного поля P_{e1} от поглощенной сторонней мощности P_Q (характерные значения P_Q отмечены на оси абсцисс)

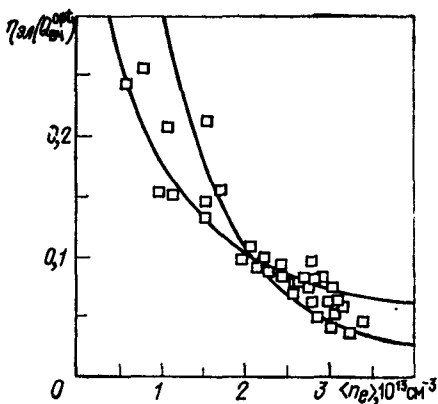


Рис. 3.9. Максимальная эффективность преобразования энергии НГ-источника в энергию полоидального магнитного поля η_{el}^{opt} как функция плотности плазмы для токамака «Alcator-C». Кривые соответствуют расчету при разных предположениях о значении энергетического времени τ_E [56], точки — данные эксперимента [151]

могут быть экзотические режимы с большим излучением.) Это позволяет переписать условие (3.102) в виде

$$\frac{\partial}{\partial T_e} \left[R \left(\frac{W_T}{\tau_E} - \frac{I}{\eta_{st}} \right) \right] = 0. \quad (3.103)$$

Предположим для простоты, что энергетическое время зависит от температуры степенным образом ($\tau_E \propto T_e^\alpha$) и что $R_s \ll R_1$, тогда нетрудно убедиться, что (3.103) имеет место при $P_Q = P_Q^*$, где

$$P_Q^* = \frac{3}{1+2\alpha} \frac{I}{\eta_{st}} - IU = \frac{3P_Q^{st}}{1+2\alpha} - IU. \quad (3.104)$$

Отсюда видно, что равенство (3.103) возможно, и, значит, dI/dt имеет максимум, если $\alpha > -1/2$. Ранее было установлено, что вклад второго слагаемого в (3.104) не превышает 30%, поэтому простые оценки можно получить, отбросив это слагаемое и положив $\alpha = 0$ (алкаторный скейлинг для теплопроводности):

$$P_Q^* = 3P_Q^{st} \text{ или } I_0 = 3I. \quad (3.105)$$

Эти соотношения показывают, что для достижения наибольшей скорости подъема тока в токамаке нижнегибридным методом следует увеличивать вводимую мощность одновременно с подъемом тока так, чтобы обеспечивать примерно трехкратное превышение поглощаемой мощности над мощностью, необходимой для стацио-

нарного поддержания текущего значения тока. При этом скорость подъема тока составляет

$$dI/dt = (2R/L)I, \quad (3.106)$$

напряжение обхода

$$U = -2RI, \quad (3.107)$$

эффективность преобразования энергии внешнего источника в энергию полоидального магнитного поля

$$\eta_{el} = (2/3)IR\eta_{st} = -(1/3)U\eta_{st}. \quad (3.108)$$

В последних трех формулах сопротивление $R \approx R_s$ должно быть найдено из условия баланса энергии

$$P_Q^* - IU = W_T/\tau_E = 3I/\eta_{st}. \quad (3.109)$$

Таким образом, скорость подъема тока в токамаке при довольно общих предположениях о законе удержания энергии имеет максимум по вводимой мощности. Нетрудно установить, что существует максимум и по другому свободному параметру — плотности плазмы. Действительно, как уже было показано, при малой плотности плазмы, когда наведенная проводимость превышает спитцеровскую, $\sigma_1 \gg \sigma_s$ ($R_1 \ll R_s$), напряжение обхода можно увеличивать пропорционально плотности $U \propto n_e$, если при этом выполнено условие $E/E_{кр} < 4\%$. С другой стороны, при большой плотности плазмы проводимость является спитцеровской, $\sigma_s \gg \sigma_1$, и зависимость напряжения от плотности становится обратной. Это видно из уравнения энергодолговесия (3.109): с увеличением плотности растет вводимая мощность и вместе с ней температура плазмы. В соответствии с (3.107) это ведет к падению напряжения обхода. Отсюда ясно, что существует оптимальное для скорости роста тока значение плотности, причем это значение примерно определяется условием $\sigma_1 \approx \sigma_s$.

Вернемся теперь к условию (3.101). Геометрические соображения, ясные из рис. 3.8, показывают, что условие (3.101) выполняется при несколько меньших значениях поглощенной мощности $P_Q = P_Q^{opt} < P_Q^*$, чем разобранное выше условие (3.102). Вместе с тем оба условия, (3.101) и (3.102), достаточно близки, и в пределах точности выражений (3.105)—(3.108) можно считать, что они соответствуют максимуму эффективности η_{el} . Условие оптимальной эффективности преобразования энергии НГ-волн в энергию полоидального магнитного поля в виде (3.105) подтверждается результатами экспериментов на токамаке Alcator-C [151]. Авторы этой работы установили, что в плазме с плотностью $n_e > 10^{13}$ см⁻³ и температурой $T_e \approx 1,5$ кэВ эффективность η_{el} достигает максимума при условии $P_Q = (2 \div 3)P_Q^{st}$. Напомним, что в плазме с такими параметрами проводимость близка к спитцеровской, и следует ожидать падения эффективности с ростом плотности. Кривые, рассчитанные по формулам (3.97), (3.98), а также результаты эксперимента показаны на рис. 3.9; видно, что они находятся в хорошем согласии.

Нуль-мерные самосогласованные модели для расчета безындукционного тока в токамаке типа описанной здесь широко используются ввиду их простоты и наглядности, а также потому, что довольно часто они допускают аналитическое исследование. Такой подход удобен для решения задач оптимизации, возникающих при разработке проектов стационарного реактора-токамака. На основе этого подхода исследуются зависимости от плотности плазмы магнитного поля, размеров установки, разрабатываются сценарии разряда, сравниваются различные методы генерации тока и варианты конструкции устройств ввода дополнительной энергии. На примере разобранной задачи мы хотели показать важность самосогласованного учета температуры плазмы в таких расчетах. Несмотря на неопределенность экстраполяции существующих представлений об удержании энергии на реакторе-токамаке с безындукционным поддержанием тока метод позволяет просмотреть широкий спектр возможностей и получить достаточно надежные результаты. Разные коллективы авторов используют несколько различных подходов. Более подробную библиографию по этим вопросам можно найти в [159—163].

3.3. Распределение безындукционного тока в токамаке

В § 3.2 была рассмотрена динамика тока в предположении однородного распределения плотности тока и других параметров по области, занятой плазмой. Естественно, такое ограничивающее предположение приводит к потере целого ряда важных и интересных аспектов поведения плазменного шнура в токамаке, главных из которых, конечно, является вопрос МГД-устойчивости профилей неиндукционного тока. Ниже обсудим методы расчета пространственного распределения плотности тока, создаваемого в токамаке без помощи вихревого электрического поля. В § 3.4 такие расчеты войдут как одна из составных частей в самосогласованную транспортную модель токамака с безындукционным поддержанием тока. Самосогласованный подход подразумевает учет всего комплекса процессов в токамаке в их взаимосвязи, однако оказывается, что задачу определения профилей безындукционного тока и диссипируемой этим током мощности можно решать независимо, считая профили плотности и температуры плазмы заданными в пространстве и фиксированными во времени. В качестве малого параметра, позволяющего выделить одну задачу из другой, служит отношение «пролетного» времени нейтральных атомов или ВЧ-волны к времени диссипации их энергии или времени изменения макроскопических параметров плазмы. Таким образом, задача состоит в определении пространственных профилей вкладываемой мощности и безындукционного тока, служащих внешними источниками для уравнений энергобаланса, диффузии магнитного поля и задач МГД-устойчивости.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, сделаем два замечания. Первое из них касается методов расчета радиаль-

ных профилей поглощаемой мощности источника безындукционного тока. Во многих случаях эти методы полностью аналогичны соответствующим расчетам по дополнительному нагреву плазмы в токамаках, имеющим более чем двадцатилетнюю историю и подробно описанным в ряде обзоров и монографий [16, 21, 164]. Поэтому здесь уделим основное внимание НГ-методу создания безындукционного тока. Такой выбор, с одной стороны, обусловлен тем, что именно в этом методе достигнуты наибольшие успехи по генерации тока и накоплена обширная экспериментальная информация, стимулирующая развитие теоретических исследований. С другой стороны, здесь обнаружилось и до сих пор остаются до конца непонятыми некоторые особенности взаимодействия волн с плазмой, которые отсутствуют в проблеме нагрева плазмы с помощью НГ-волн.

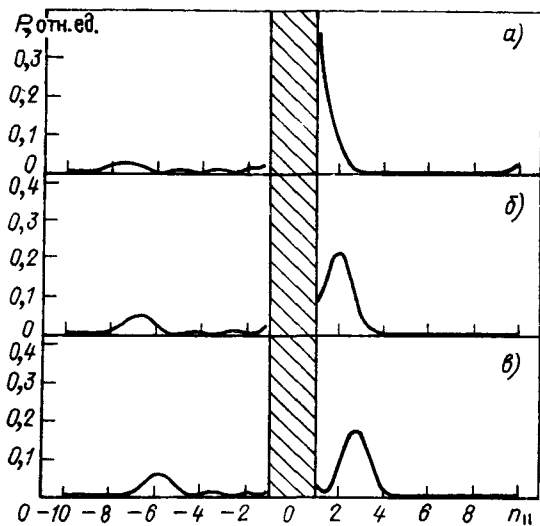
Далее для простоты будет считать, что магнитная конфигурация токамака представляет собой систему вложенных торов, которая в плоскости малого сечения образует набор concentрических окружностей, пренебрегая такими эффектами, как смещение, вытянутость, образование магнитных островов и другие, требующими для своего описания решения задачи о равновесии плазмы. С одной стороны, названные эффекты легко учесть с помощью изложенных ниже методов расчета пространственного распределения плотности тока. Такой учет не требует каких-либо принципиальных изменений этих методов. С другой стороны, упрощенный подход заведомо применим для описания подавляющего большинства современных экспериментов по генерации НГ-тока. Поэтому в дальнейшем будем считать, что распределение плотности тока и другие параметры плазмы зависят от единственной пространственной координаты — расстояния до магнитной оси, одинакового для всех точек данной магнитной поверхности.

Сравнивая результаты многочисленных экспериментов по генерации тока в токамаке НГ-волнами с предсказаниями изложенной выше теории, можно отметить два наиболее важных обстоятельства. Первое — это то, что наблюдаемая эффективность генерации тока, как стационарная (3.60), так и динамическая (3.76), вполне разумно согласуются с теоретическими формулами. Имеющиеся различие в 2—3 раза легко объяснить некоторыми неучтенными в простейшей теории эффектами, а также еще неиспользованными в экспериментах возможностями по повышению эффективности генерации и достижению ее теоретического значения. Второе бросающееся в глаза обстоятельство — отличие абсолютного значения генерируемого тока от расчетного, как правило, на 2—3 порядка. Такое различие получится, если по спектру излученных волн, пример которого показан на рис. 3.10, найти коэффициент квазилинейной диффузии, решив кинетическое уравнение, вычислить ток. При этом окажется, что излучаемая мощность практически не поглощается в плазме и соответственно ток экспоненциально мал. Аналогичный эффект отсутствует, если НГ-волны используются для нагрева плазмы. Дело в том, что при нагреве

Рис. 3.10. Зависимость спектрального распределения мощности НГ-волн, излучаемых в плазму от продольного замедления $N_{||} = k_{||}c/\omega$, при разных значениях сдвига фаз между волноводами. Показан спектр шестиволнового грилла установки PLT [186]

излучаемый спектр отличается от показанного на рис. 3.10 гораздо большим содержанием замедленных волн, хорошо поглощающихся в плазме.

Сформулированное несоответствие теории с экспериментом можно прокомментировать следующим образом. С одной стороны, совпадение теоретической и экспериментальной эффективностей как по абсолютной величине, так и по зависимости от параметров говорит о том, что в эксперименте реализуется именно тот механизм квазилинейного взаимодействия волн с плазмой, который лежит на основе теоретического рассмотрения проблемы генерации тока. С другой стороны, достаточно надежным представляется и расчет формы излученного спектра НГ-волн, основанный только на решении уравнений Максвелла в вакууме и прилегающем к замедляющей системе узком слое плазмы. Поэтому естественно предположить, что при распространении волн от периферии плазмы к центру происходит



обогащение спектра медленными волнами, которые и обеспечивают поглощение энергии на электронах в результате затухания Ландау. Предложено несколько механизмов трансформации спектра, как линейных, так и нелинейных, но пока не существует общепринятого объяснения этого явления. Такое положение естественно лишает теорию предсказательной силы и затрудняет поиск дальнейших путей оптимизации генерации тока, способов управления профилем тока и других возможных применений метода. Для того чтобы получить представление

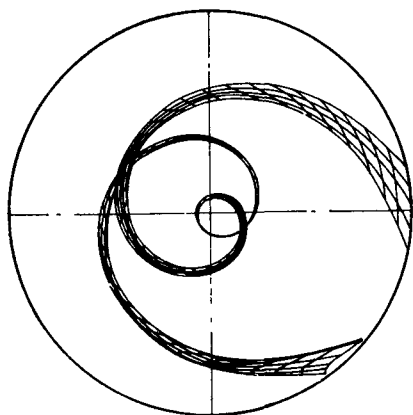


Рис 3.11. Траектории НГ-волн в проекции на плоскость малого сечения токамака [175]

о характере имеющихся противоречий и возможностях их преодоления, рассмотрим сначала несколько модельных ситуаций.

Предположим прежде всего, что $N_{\perp}^2 \gg 1$ и НГ-волны описываются электростатическим законом дисперсии $k_i k_j \epsilon_{ij} = 0$. В экспериментах по генерации тока внутри плазмы выполнены условия $\omega_{Be}^2, \omega_{pe}^2 \gg \omega^2 \gg \omega_{Bi}^2, \omega_{pi}^2$, которые позволяют записать дисперсионное соотношение в простом виде:

$$k_{\perp} = (\omega_{pe}/\omega) k_{\parallel}. \quad (3.110)$$

Запишем в этом же приближении уравнение переноса энергии для НГ-волн:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{\text{гp}} W_{\mathbf{k}} = 2\Upsilon_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}, \quad (3.111)$$

где

$$W_{\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \omega_{pe}^2 |E_{\parallel, \mathbf{k}}|^2 (\omega^2 \cdot 8\pi); \quad (3.112)$$

$$-2\Upsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\pi\omega^3}{n_e k_{\parallel}^2} \left. \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} \right|_{v_{\parallel} = \omega/k_{\parallel}}; \quad (3.113)$$

$$\mathbf{v}_{\text{гp}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\omega}{k_{\parallel}} \left(\mathbf{e}_{\parallel} - \frac{\omega}{\omega_{pe}} \mathbf{e}_{\perp} \right) \approx \frac{\omega}{k_{\parallel}} \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (3.114)$$

Теперь видно, что для описания поглощения волны при распространении в глубь плазмы нужно знать зависимость волнового вектора от радиуса плазмы $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{r})$. Эта зависимость определяется обычно с помощью решения уравнений для траектории лучей (рис. 3.11). Здесь даны траектории лучей, выходящих из разных точек волноводной системы, в проекции на плоскость малого сечения токамака. Как видно из (3.114), групповая скорость волн направлена почти вдоль силовой линии, поэтому в тороидальном направлении волна также совершает несколько оборотов. Кроме траекторий здесь показано движение волнового фронта.

Как было сказано выше, главной проблемой является изменение продольной фазовой скорости волн $v_{\parallel}^{\phi} = \omega/k_{\parallel}$ при движении по радиусу, так как именно эта величина определяет эффективность поглощения волн (3.113). Запишем выражение для продольного компонента волнового вектора k_{\parallel} в виде

$$k_{\parallel}(r, \theta) = \frac{n}{R_0 + r \cos \theta} + \frac{(R_0 + r \cos \theta) B_{\theta}(r, \theta)}{R_0 B_0}. \quad (3.115)$$

Из этой записи видно, что изменение $|k_{\parallel}|$ связано, во-первых, с изменением расстояния от текущей точки траектории до главной оси тора $R_0 + r \cos \theta$ и, во-вторых, с изменением второго слагаемого, содержащего малый параметр B_{θ}/B_0 . Оценим это слагаемое. В начале траектории $k_{\theta} = 0$ и $k_r = k_{\perp} = k_{\parallel} \omega_{pe}/\omega$. Приращение k_{θ} вдоль траектории определяется зависимостью дисперсионного соотношения (3.110) от угла θ . Это дает масштаб изменения

k_θ за один оборот волны вокруг магнитной оси

$$\Delta k_\theta = k_\theta \approx k_\perp r/R_0, \quad (3.116)$$

откуда находим приращение k_\parallel ,

$$\Delta k_\parallel / k_\parallel \approx \omega_{pe} B_\theta r / (\omega B_0 R_0) = \omega_{pe} r^2 / (\omega R_0^2 q). \quad (3.117)$$

Оценка (3.117) показывает, что на рассматриваемом участке траектории не происходит радикального изменения k_\parallel , а значит, и продольной фазовой скорости волны. Кроме того, в наиболее распространенном случае возбуждения НГ-волн на внешнем обводе тора изменения первого и второго слагаемых в (3.115) частично компенсируются, а численный расчет показывает, что за первый проход волны по радиусу замедление N_\parallel изменяется незначительно. (При использовании НГ-волн для нагрева плазмы это может быть не так из-за большого значения k_\perp в окрестности НГ-резонанса.)

Из (3.116) можно сделать вывод, что на первом проходе по радиусу $k_\theta \ll k_\perp$ и, следовательно, $k_r \approx k_\perp$. Условия $k_\parallel \approx \text{const}$ и $k_r \approx k_\perp = k_\parallel \omega_{pe} / \omega$ позволяют построить простую модель формирования радиального распределения плотности тока [183] и выяснить с ее помощью характер связи спектра излучаемых волн с профилем генерируемого ими тока. С помощью этой модели можно понять, какая трансформация спектра волн при распространении достаточна для устранения противоречия между теорией и экспериментом.

Усредним уравнение (3.111) по тороидальной магнитной поверхности и перепишем его в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_{\text{гр},r} W_{\mathbf{k}} = 2\gamma_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}. \quad (3.118)$$

Здесь затухание $\gamma_{\mathbf{k}}$, плотность энергии $W_{\mathbf{k}}$ и радиальный компонент групповой скорости $v_{\text{гр},r}$ имеют смысл не локальных, как в (3.112)—(3.114), а средних по магнитной поверхности величин, но поскольку угловые зависимости в (3.112)—(3.114) не существенны, то сохраним в (3.118) прежние обозначения. Для удобства дальнейшего изложения перейдем от спектральной плотности энергии $W_{\mathbf{k}}$ к функции W_{v_\parallel} , зависящей от скорости резонансных частиц и связанной с $W_{\mathbf{k}}$ соотношением

$$W_{v_\parallel} = \int d^3 k \delta(k_\parallel - \omega/v_\parallel) W_{\mathbf{k}}. \quad (3.119)$$

Уравнение переноса энергии НГ-волн для функции $W_{v_\parallel}(r, v_\parallel)$ имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\omega_{pe}} W_{v_\parallel} = - \frac{\pi v_\parallel}{n_e} W_{v_\parallel} \frac{\partial f_e}{\partial v_\parallel}, \quad (3.120)$$

где f_e — одномерная функция распределения электронов. В приближении [183] f_e подчиняется стационарному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[\frac{v v_{Te}^3}{v_{\parallel}^2} \left(f_e + \frac{v_{Te}^2}{2v_{\parallel}} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} \right) + \frac{\pi \omega^2 W_{v_{\parallel}}}{2n_e m v_{\parallel}} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} \right] = 0. \quad (3.121)$$

Система (3.120), (3.121) определяет профиль плотности НГ-тока в плазме, если известны спектральная плотность энергии на границе плазмы $W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel})$ и радиальное распределение плотности $n_e(r)$ и температуры электронов $T_e(r)$. Предположим сначала, что на границе плазмы формируется спектр $W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel})$, отличный от нуля в области $v_{Te} \ll v_1 \leq v_{\parallel} \leq v_2$ и такой, что условие

$$W_{v_{\parallel}}(r, v_{\parallel}) \gg \frac{2v n_e v_{Te} T_e}{\pi \omega^2 v_{\parallel}^2}. \quad (3.122)$$

выполнено всюду при $0 \leq r \leq a$ и $v_1 \leq v_{\parallel} \leq v_2$. Тогда на функции распределения f_e образуется плато от v_1 до v_2 , а профиль тока определяется формулой

$$j(r) = - \frac{e(v_2^2 - v_1^2)}{2\sqrt{\pi}} \frac{n_e(r)}{v_{Te}(r)} \exp \left[- \frac{v_1^2}{v_{Te}^2(r)} \right]. \quad (3.123)$$

Здесь в правой части явно указаны все функции, зависящие от радиуса. Видно, что предэкспоненциальный фактор практически не зависит от радиуса r , в то время как экспонента дает очень сильную радиальную зависимость. Условие (3.122) всегда выполнено на периферии плазмы, и, значит, формула (3.123) показывает профиль плотности тока вблизи границы плазмы. При движении волны к центру происходит ее поглощение, и условие (3.122) может нарушаться. Тем не менее по-прежнему главный вклад в формирование тока дает область фазового пространства (r, v_{\parallel}) , в которой условие (3.122) выполнено, а на функции распределения образуется плато. Этот ток определяется формулой (3.123), но в ней следует уже считать $v_1 = v_1(r)$ и $v_2 = v_2(r)$, где функции $v_1(r)$ и $v_2(r)$ определяют область фазового пространства $v_1(r) \leq v_{\parallel} \leq v_2(r)$, в которой справедливо условие (3.122). Зная функции $v_1(r)$ и $v_2(r)$, можно по (3.123) определить профиль тока, и наоборот, задавшись некоторым профилем тока, можно сформулировать требования на функции $v_1(r)$ и $v_2(r)$, обеспечивающие этот профиль. Заранее ясно, что по смыслу функций $v_1(r)$ и $v_2(r)$ первая из них, $v_1(r)$, может быть только убывающей функцией радиуса r , а вторая, $v_2(r)$, только возрастающей. Иначе говоря, область плато на функции распределения $v_1(r) \leq v_{\parallel} \leq v_2(r)$ по мере углубления в плазму может только сокращаться. Поэтому $v_2(r) \leq v_2(a)$, а уменьшение v_2 приводит к снижению эффективности, и, значит, зависи-

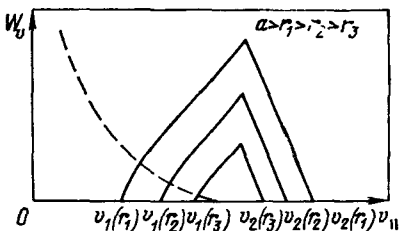


Рис. 3.12. Изменение спектра НГ-волн под действием поглощения при распространении в плазме. Искажения, связанные с тороидальными эффектами, не показаны. Пунктиром схематически изображена правая часть неравенства (3.122).

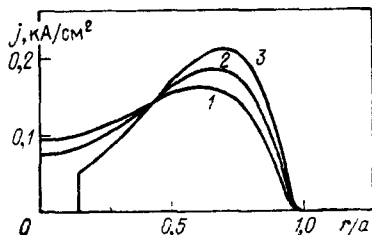


Рис. 3.13. Профиль плотности тока в установке ИНТОР [$R_0=5,3$ м, $a=1,2$ м, $n_e=2 \cdot 10^{14}$ ($1-r^2/a^2$) см $^{-3}$, $T_e=T_{e0}(1-r^2/a^2)$] для спектра (3.125) при $mv_{\perp}^2/2=5$ кэВ, $mv_{\parallel}^2/2=150$ кэВ:

1 — $T_{e0}=18$ кэВ, $I=5$ МА, $P_Q=18$ МВт;
 2 — $T_{e0}=20$ кэВ, $I=5,7$ МА, $P_Q=19,5$ МВт;
 3 — $T_{e0}=22$ кэВ, $I=6,1$ МА, $P_Q=20$ МВт
 [183]

мость $v_2(r)$ вообще нежелательна. Напротив, зависимость $v_1(r) \geq v_1(a)$ является благоприятным фактором, так как позволяет уменьшить зависимость экспоненты в (3.123) от радиуса r .

Перейдем к выяснению характера зависимостей $v_1(r)$ и $v_2(r)$ и возможностей управления этими зависимостями с помощью задания $W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel})$. Из кинетического уравнения (3.121) следует, что при выполнении (3.122) имеется связь

$$-\frac{\pi\omega^2 v_{\parallel}}{2mn_e} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} W_{v_{\parallel}} \approx \nu v_{Te}^3 f_e, \quad (3.124)$$

откуда видно, что правая часть (3.120) не зависит от скорости. Последнее, в свою очередь, означает, что приращение $\Delta_r W_{v_{\parallel}} =$

$= W_{v_{\parallel}}(r + \Delta r, v_{\parallel}) - W_{v_{\parallel}}(r, v_{\parallel})$ также не зависит от v_{\parallel} . Деформация

спектра в процессе распространения НГ-волны по радиусу схематически показана на рис. 3.12 на примере треугольного спектра.

Очевидно, что для отсутствия зависимости v_2 от r и тем самым для получения максимальной эффективности генерации нужно, чтобы правая по v_{\parallel} граница функции $W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel})$ была достаточно резкой. Из рис. 3.10 видно, что этому условию удовлетворяют формируемые гриллом спектры при сдвиге фаз между волноводами $\Delta\Phi \leq \pi/2$. Сделанный вывод качественно согласуется с экспериментами [184, 185], в которых эффективность заметно падает при $\Delta\Phi \geq \pi/2$. Подставив (3.124) в (3.120), можно получить, что при $n_e(r) \propto T_e(r) \propto (1-r^2/a^2)$ условие слабой зависимости плотности тока от радиуса $v_{\perp}^2(r) \propto T_e(r)$ можно примерно обеспечить, если задать спектральную плотность НГ-волн на границе вида

$W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel}) = W_0 v_{\parallel}^5$. На рис. 3.13 показано распределение плотно-

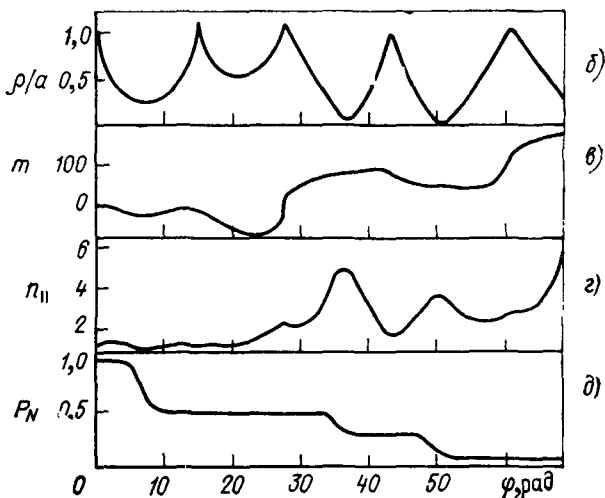
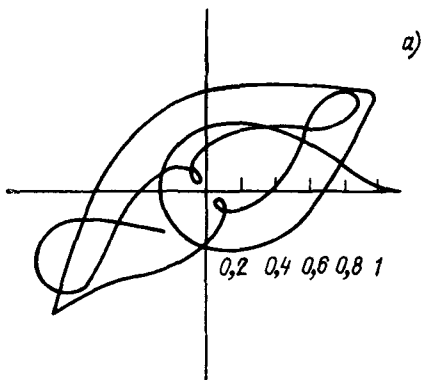


Рис 3.14. Траектория луча в плоскости малого сечения токамака $(r, 0)$ (а), зависимость r/a вдоль траектории от тороидального угла φ (б), изменение поперечного волнового числа $m=k^{\theta} r$ вдоль траектории (в), изменение замедления N_{\parallel} вдоль траектории (г) и амплитуда волны вдоль траектории (расчет выполнен для параметров установки PLT [186], $n_{e0}=4,625 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0}=1,5 \text{ кэВ}$)

сти НГ-тока, рассчитанное путем численного решения системы уравнений (3.120), (3.121) с граничным условием

$$W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel}) = \begin{cases} W_0(v_{\parallel}^2 - v_1^2)^3 & \text{при } v_1 \leq v_{\parallel} \leq v_2; \\ 0 & \text{при } v_{\parallel} < v_1 \text{ или } v_{\parallel} > v_2, \end{cases} \quad (3.125)$$

Видно, что степенные спектры типа (3.125) позволяют получить разумный профиль тока и обеспечить весьма высокую эффективность генерации.

Если грилл состоит из небольшого числа волноводов, то он создает спектр, близкий к (3.125). Например, расчеты показывают,

что спектр, излучаемый трехволноводным гриллом установки Т-7, хорошо поглощается в горячей плазме этой установки. В то же время очевидно, что спектр многоволноводных гриллов (см рис. 3.10) имеет гораздо более резкую зависимость от $v_{\parallel} = c/N_{\parallel}$, чем (3.125), и в рассмотренном приближении практически совсем не должен поглощаться в плазме из-за малости экспоненциального множителя в (3.123). С другой стороны, понятно, что для возникновения взаимодействия НГ-волн с электронами достаточно, чтобы небольшая доля энергии, переносимой слабозамедленными спектрами, показанными на рис 3.10, в процессе распространения замедлилась до значений $N_{\parallel} \gg 6$. Рассмотрим механизмы, которые могут привести к такому замедлению.

Если проследить траектории волн не за один проход от края до центра плазмы, как это делали до сих пор, а на протяжении нескольких проходов, то окажется, что значение N_{\parallel} , осциллируя вдоль траектории, постепенно возрастает, достигая в конце концов значений, достаточных для затухания волны. Такой расчет был проведен в [186]. Его результаты показаны на рис. 3.14, 3.15. Видно, что существенное замедление волны происходит в процессе второго отражения волны от периферии плазмы, а полное поглощение наступает только после десяти оборотов вокруг главной оси и примерно такого же количества проходов волны по радиусу. К сожалению, этот механизм замедления волны не допускает аналитического описания и может быть рассчитан только численными методами, причем вся процедура расчета, требующая совместного решения уравнений для траектории волн с кинетическим уравнением для электронов, оказывается сложной и трудоемкой. Тем не менее изменение N_{\parallel} вдоль траектории, обусловленное тороидальными эффектами, необходимо учитывать, если волна не поглощается за один-два прохода по радиусу. Однако этот учет требует аккуратной проверки условий применимости геометрической оптики на протяжении всей траектории [172], в частности, в точках, где $k_r = 0$ (каустиках).

Существует еще один линейный эффект, изменяющий спектр НГ-волн в процессе распространения в плазме — это дифракция, не учитываемая лучевым методом в приближении геометрической оптики. Дело в том, что, как видно из рис. 3.11, НГ-волны распространяются в плазме токамака в виде узких пучков, амплитуда которых быстро спадает в направлении, перпендикулярном к оси пучка. Если поперечный размер пучка сравнивается с локальной длиной волны, то происходит дифракционное расплывание пучка в направлении, поперечном к вектору групповой скорости. Такое расплывание не учитывается в рамках лучевого метода. Другими словами, уравнение (3.111) описывает перенос энергии только вдоль лучевых трубок, показанных на рис. 3.11. Дифракция означает вытекание волновой энергии через боковые стенки лучевых трубок и проявляется в диффузионном уширении волнового пучка.

Для того чтобы оценить влияние дифракции на деформацию

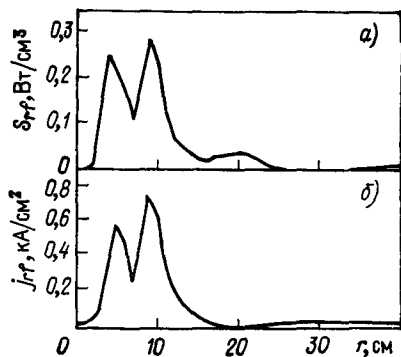


Рис. 3.15. Профиль плотности тока и поглощенной мощности для спектра рис. 3.10 и тех же условий, что на рис. 3.14. Здесь $I_{\text{НГ}} = 200$ кА, $P_{\text{НГ}} = 100$ кВт [186]

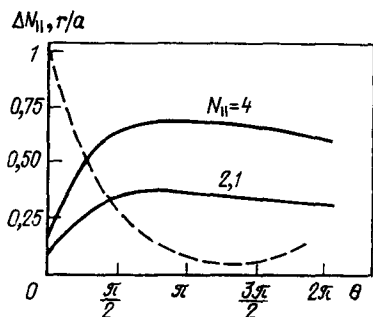


Рис. 3.16. Изменение полуширины спектра $\Delta N_{||}$ гауссова пакета НГ-волн вдоль траектории для двух волн с замедлением в максимуме пакета на границе плазмы [190]:

Штриховая линия—положение максимума пакета на траектории. Ширина спектра на границе плазмы задана в предположении, что поперечный размер волновода равен 15°

спектра НГ-волн в процессе распространения, рассмотрим волновой пучок с поперечной (по отношению к направлению распространения) шириной Δ_t . Ввиду соотношения неопределенности [187] ширина этого пучка в пространстве волновых чисел Δk_t удовлетворяет неравенству $\Delta k_t \geq \Delta_t^{-1}$. В соответствии с (3.114) НГ-волна распространяется практически вдоль силовой линии магнитного поля, поэтому можно не делать различия между шириной пучка поперек направления магнитного поля Δ_{\perp} и его шириной поперек направления вектора групповой скорости Δ_t . Кроме того, заметим, что в силу закона дисперсии (3.110) $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$, значит, $\lambda \approx 2\pi/k_{\perp}$. Теперь соотношение неопределенности можно переписать так:

$$\Delta k_{\perp} / k_{\perp} \geq \lambda / (2\pi \Delta_{\perp})$$

и окончательно с помощью (3.110) получить

$$\Delta k_{\parallel} / k_{\parallel} \geq \lambda / (2\pi \Delta_{\perp}).$$

Если принять во внимание ясную из рис. 3.11 тенденцию к уменьшению ширины пучка вдоль траектории, то становится понятно, что дифракция может приводить к заметному уширению спектров (см. рис. 3.10).

Роль дифракции количественно исследовалась в [188—190], где подтверждено, что на первом проходе волны по радиусу от границы плазмы к центру и обратно дифракционные эффекты оказывают тем большее влияние на расплывание спектра, чем меньше поперечный размер волновода. В [188, 189] решалось полное волновое уравнение, что, конечно, требует преодоления значитель-

ных вычислительных трудностей и не позволяет рассчитывать на широкое применение этого метода. В [190] использован асимптотический метод [191, 192], специально предназначенный для описания узких волновых пучков. В применении к НГ-волнам этот метод по трудоемкости близок к лучевому методу, причем для широких пучков дает совпадающие с лучевым методом результаты.

Физический смысл асимптотического метода [190] состоит в том, что вдоль направления распространения волны используется ВКБ-приближение, а поперек этого направления сохраняется волновое описание. Математически он отличается от лучевого метода другим способом разложения волнового уравнения по малому параметру c/ω . Волновой пучок или пакет описывается усредненными характеристиками — моментами. Уравнение нулевого приближения совпадает с уравнением лучевых траекторий и задает движущиеся максимума (а точнее говоря, центра масс) пакета. Следующей усредненной характеристикой пакета является его ширина Δ_l или вариант [193] — момент второго порядка. Уравнение для этой величины соответствует следующему порядку разложения по малому параметру и описывает дифракционное расплывание спектра

На рис. 3.16 показано уширение спектра по N_{\parallel} при распространении НГ-волн по плазме [190]. Здесь взяты параметры плазмы, близкие к параметрам рис. 3.14, 3.15. Рассмотрены две волны с фиксированными значениями тороидального волнового числа n . Из-за конечности полоидального размера волновода эти волны уже на границе плазмы обладают конечной шириной спектра по k_{θ} , а значит, и по N_{\parallel} . Из рис. 3.16 видно, что на первом проходе по радиусу уширение спектра достаточно велико и превышает изменение N_{\parallel} , связанное с тороидальными эффектами. Следует также иметь в виду, что показанное на рис. 3.16 изменение ΔN_{\parallel} минимально, так как оно относится к случаю гауссова распределения амплитуды волны по углу θ . Реальный волновод задает синусоидальное распределение амплитуды. Для того чтобы применить к нему представлений на рис. 3.16 результат, нужно реальное распределение разложить в ряд по так называемым пучковым модам (функциям параболического цилиндра) и учесть, что мода номера l испытывает уширение в $\sqrt{l+0,5}$ раз большее, чем показанное на рисунке. Примерно 10% энергии волнового пакета с синусоидальным распределением амплитуды содержится в модах с $l \geq 10$. Соответствующее уширение спектра представляется достаточным для возникновения возможности резонансного поглощения энергии НГ-волн электронами уже на первом проходе по радиусу. К сожалению, на сегодняшний день отсутствуют расчеты, которые позволили бы с большей определенностью оценить роль дифракции во взаимодействии НГ-волн с плазмой токамака.

Мы рассмотрели два линейных механизма перераспределения энергии НГ-волн по спектру. Кроме этого, предложено еще несколько нелинейных механизмов, роль которых сводится к запол-

нению «спектрального зазора» между быстрыми волнами, генерируемыми замедляющей системой, и волнами с фазовыми скоростями порядка трех тепловых скоростей, обеспечивающими затухание Ландау на электронах. В [27] показано, что перекачка энергии по спектру в область медленных волн может быть обусловлена возбуждением веерной неустойчивости [25]. Другая возможность связана с рассеянием НГ-волн на флуктуациях плотности плазмы [194, 195]. При таком рассеянии происходит конверсия излученных гриллоном быстрых волн в медленные волны, интенсивно поглощающиеся в плазме токамака. Еще один механизм обсуждается в [196, 197], где показано, что даже в отсутствие спонтанных флуктуаций плотность плазмы модулируется под действием пондеромоторной силы, связанной с внешним ВЧ-воздействием. В результате генерируются более высокие пространственные гармоники, что и означает замедление излученного спектра.

В заключение можно сказать, что каков бы ни был механизм заполнения «зазора» в спектре излучаемых НГ-волн, он должен обеспечить перекачку сравнительно небольшой доли энергии ($\leq 10\%$) в область продольных фазовых скоростей масштаба нескольких тепловых [198]. Эта доля энергии, конечно, генерирует ток с меньшей эффективностью, чем исходные быстрые волны, но на интегральной эффективности это практически не сказывается. Напротив, если нелинейность приводит к изменению характера взаимодействия быстрых волн с плазмой, как это имеет место при развитии веерной неустойчивости, то результатом может быть заметное снижение эффективности генерации тока [27]. Безусловно, необходимо дальнейшее экспериментальное и теоретическое изучение процессов, сопровождающих распространение НГ-волн в плазме токамака, тем не менее уже сегодняшний уровень понимания этих явлений позволяет моделировать многие особенности современных экспериментов и надеяться на достаточно адекватное прогнозирование возможностей НГ-метода генерации тока в будущем.

3.4. Динамика плотности тока в токамаке

В конце § 3.2 приведен пример решения самосогласованной задачи на основе нуль-мерного подхода, т. е. описания средних по объему характеристик плазменного шнура. Такой подход безусловно оправдан, когда исследуются наиболее общие взаимосвязи между параметрами плазмы или когда исходная неопределенность в постановке задачи делает нецелесообразным детальное описание пространственных распределений таких величин, как плотность тока, поглощаемая мощность, температура и др. В то же время при сопоставлении теории с имеющимся экспериментом усредненное описание часто оказывается недостаточным, так как в современных экспериментах получена довольно подробная информация не только об усредненных, но и о локальных параметрах плазмы. Такое сопоставление требует создания самосогласованных численных мо-

делей, которые собственно и являются «конечным продуктом» теории генерации тока в токамаке.

Вполне удовлетворительное самосогласованное описание плазменного шнура в токамаке достигается в рамках одномерного подхода, хотя некоторые специальные задачи, такие, как исследование МГД-устойчивости профиля тока, могут потребовать двумерного анализа. К настоящему времени одномерный подход довольно хорошо разработан для описания транспортных процессов в токамаках. Однако опыт создания транспортных кодов показывает, что разработка работоспособной численной модели требует ряда упрощающих предположений и отбрасывания ненужных деталей. Часть этих предположений основывается, как правило, на результатах эксперимента. Поэтому, с одной стороны, адекватное описание эксперимента можно получить только на основе достаточно развитой модели, а с другой, создание такой модели требует наличия достаточно представительных экспериментальных данных для выделения из всего многообразия явлений наиболее существенных. Поскольку наибольшая экспериментальная информация имеется по НГ-методу генерации тока, то и наиболее далеко продвинуты на сегодняшний день модели плазменного шнура в токамаке с НГ-поддержанием тока. Впрочем, даже для этого метода моделирование пока находится лишь в начальной стадии. В настоящем параграфе рассмотрим некоторые результаты, полученные на основе самосогласованного описания всех процессов создания и поддержания безындукционного тока в токамаке с учетом влияния этого тока на энергобаланс плазмы.

3.4.1. Система транспортных уравнений в токамаке с безындукционным поддержанием тока. Будем исходить из обычного для задач энергобаланса предположения о том, что все параметры плазмы зависят от времени и от единственной пространственной координаты, отмечающей текущую магнитную поверхность. Это предположение оправдано тем, что продольный перенос выравнивает функцию распределения частиц по всей магнитной поверхности гораздо быстрее, чем характерные времена процессов, которые будем исследовать. Как и в предыдущем параграфе, для того чтобы не перегружать последующее изложение несущественными деталями будем считать, что магнитные поверхности в плоскости малого сечения токамака представляют собой концентрические окружности. Таким образом, все локальные величины, о которых пойдет речь в дальнейшем, такие, как плотность и температура плазмы, плотность тока, вложенная мощность и другие функции радиуса r и времени t , будут характеризовать средние на данной магнитной поверхности значения соответствующих переменных.

Записанная в этих предположениях стандартная система баланса частиц и энергии в токамаке имеет вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r\Gamma = S; \quad (3.126)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial n_e T_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r q_e = p_e + p_{Qe} + jE; \quad (3.127)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial n_e T_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r q_i = p_i + p_{Qi}, \quad (3.128)$$

Здесь p_{Qe} , p_{Qi} — вклад энергии в электронный и ионный компоненты плазмы, связанный с генерацией тока; p_e и p_i — другие источники и стоки тепла, такие, как дополнительный нагрев, электрон-ионный теплообмен, теплообмен с α -частицами, тормозное излучение, излучение примесей и др.; Γ_e и Γ_i — радиальные компоненты потока частиц, энергии электронов и ионов. Выражение потоков через градиенты плотности плазмы n_e , электронной T_e и ионной T_i температур составляет предмет отдельного исследования [181, 182] и выходит за рамки настоящего обзора. Эту часть задачи подробно обсуждать не будем, считая, что потоки подобраны согласованно с конкретным экспериментом или основаны на общепринятых представлениях об энергобалансе плазмы с дополнительным нагревом.

Систему уравнений (3.126) — (3.128) нужно дополнить уравнением для плотности тока $j(r, t)$. Исключив из системы уравнений Максвелла для аксиально-симметричного цилиндра азимутальный компонент магнитного поля, получим скалярное уравнение, связывающее продольную плотность тока j с продольным электрическим полем E :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r}. \quad (3.129)$$

Вместе с законом Ома [см. (3.53)]

$$j = j_b + j_Q + \sigma_s E \quad (3.130)$$

и соотношением, связывающим плотность тока стороннего источника j_Q с мощностью этого источника p_Q , системы уравнений (3.126) — (3.129) достаточно для описания динамики плотности тока и остальных плазменных характеристик. Закон Ома (3.130) в отсутствие бутстреп-тока j_b подробно обсуждался в § 3.2. Что касается зависимости $j_Q(p_Q, n_e, T_e, E, \dots)$, то ее можно брать из эксперимента или рассчитывать теоретически. Пример такой связи дается формулой (3.61). Если переписать эту формулу через плотность неиндукционного тока j_Q и удельную мощность p_Q , то искомая связь примет вид

$$p_Q = (j_Q - \sigma_1 E) (1/\eta - E), \quad (3.131)$$

где η — стационарная эффективность генерации тока, обсуждавшаяся в гл. 2. Вообще говоря, связь j_Q и p_Q , так же как и закон Ома, определяется на основе решения кинетического уравнения.

Система (3.126) — (3.129) баланса частиц, энергии и диффузии тока в токамаке записана в цилиндрической форме. Кроме того, мы не делаем различия между продольными и торoidalными компонентами плотности тока и электрического поля. Это также

общепринятое в задачах энергобалакса приближение. Специфика тороидальной системы при таком подходе проявляется только в коэффициентах переноса, неоклассических поправках к проводимости, бутстреп-токе и т. д. Эти эффекты, связанные с существованием запертых частиц, не влияют на те методы генерации тока, в которых внешняя сила приложена к быстрым частицам. В этом случае тороидальные поправки аддитивно добавляются к эффектам, обусловленным собственно генерацией тока. При генерации тока путем инжекции нейтралов тороидальные поправки учитываются в выражении для эффективности. Наконец, роль запертых частиц при генерации тока альфвеновскими и другими волнами с малой фазовой скоростью обсуждалась в гл. 2, но считать этот вопрос выясненным окончательно еще нельзя.

В качестве краевых условий к системе уравнений (3.126) — (3.129) используются условия обращения в нуль потоков частиц, тепла и магнитного потока на оси системы. Кроме того, обычно плотность плазмы и температуру считают заданными на границе плотного шнура. Краевым условием для плотности тока служит уравнение внешней цепи установки токамак (3.64). Наиболее простая и часто используемая его форма — это условие заданной зависимости полного тока в плазме I от времени:

$$2\pi \int_0^a j(r, t) r dr = I(t). \quad (3.132)$$

Сформулированная система уравнений полностью описывает динамику процессов генерации тока в токамаке. Использование одномерного подхода позволяет существенно расширить класс задач по сравнению с возможностями рассмотренной выше нуль-мерной модели. Помимо очевидных приложений одномерной модели, таких, как задача устойчивости, где требуется знание пространственного распределения плотности тока и где нуль-мерная модель неприменима, существует еще одна физическая причина различия двух подходов. Для того чтобы сформулировать эту причину, вернемся к обсуждению скин-времени как характерного времени переходных процессов.

Используя энергетический подход, можно определить скин-время как отношение энергии магнитного поля $W_I = LI^2/2$ к мощности RI^2 , которая диссипируется в плазме при протекании в ней электрического тока I , создающего это магнитное поле. С точностью до множителя $1/2$ это будет время L/R электрической цепи с последовательно включенными сопротивлением R и индуктивностью L . Однако плазменный виток отличается от обычной электрической цепи тем, что значительная доля полной энергии магнитного поля W_I сосредоточена внутри объема, занятого плазмой $W_I = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$. Эта доля W_{int} составляет обычно 25—30% W_I . Соответственно скин-время можно разделить на две части, L_{int}/R и L_{ext}/R , причем первая, как правило, в 2—3 раза меньше второй. Первая величина характеризует время, за которое уста-

навливаются все переходные процессы внутри плазменного шнура. Другими словами, за это время заканчивается перестройка профиля плотности тока в плазменном шнуре, так что дальнейшее изменение полного тока в плазме I происходит уже с сохранением профиля $j(r)$. Наконец, L_{ext}/R — это время, за которое полный ток плазмы тоже выходит на стационарный уровень.

Из этого обсуждения становится ясно, что в рамках нуль-мерной модели можно описывать самые медленные процессы, протекающие за времена масштаба L_{ext}/R и больше. Процессы с характерными временами масштаба L_{int}/R следует изучать на основе одномерной модели, так как нуль-мерный подход даст здесь неправильный результат. Другими словами, переход от нуль-мерного подхода к одномерному повышает не только пространственное, но и временное разрешение модели от времен масштаба L_{ext}/R до времен порядка и меньше энергетического времени жизни плазмы. Таким образом, если во временной шкале нуль-мерной модели изменение температуры T_e , T_i , плотности n_e , эффективного заряда Z_{ef} и других параметров плазмы предполагалось мгновенным, то одномерная модель позволяет включить в рассмотрение времена порядка энергетических. Динамика генерации тока на этих временах в основном определяется процессами переноса, контролирующими поведение T_e , T_i , n_e , Z_{ef} и т. д. Зависящие от величины j_Q , j_Ω , E меняются при этом адиабатически, хотя сами изменения могут быть весьма существенными. Если следовать общепринятой терминологии, то скиновым временем плазменного шнура называют только меньшее из времен: $\tau_{ск} = L_{int}/R$ или в гауссовой системе единиц $\tau_{ск} = 4\pi\sigma a^2/c^2$. Большее из двух времен, L_{ext}/R , естественно называть характерным временем эквивалентной электротехнической схемы токамака $\tau_{ц}$ — время цепи. Следует, конечно, иметь в виду, что реальная цепь с учетом индуктора может иметь и другие характерные времена.

3.4.2. Роль индукционного электрического поля в динамике перестройки профиля плотности тока. Рассмотрим простой пример, поясняющий различие между скиновым временем плазменного шнура $\tau_{ск}$ и временем цепи $\tau_{ц}$. Пусть внешний источник мгновенно создает прямоугольный профиль плотности тока $j_Q(r)$, показанный на рис. 3.17,а штриховой линией. Будем считать, что в дальнейшем мощность источника подстраивается так, что профиль тока j_Q не меняется. На рис. 3.17 схематически показана эволюция полной плотности тока $j(r)$ и напряженности электрического поля $E(r)$ в процессе формирования стационарного распределения. Игнорируя ряд быстрых процессов, которые обсуждались в § 3.2, можно считать, что одновременно создается электрическое поле обратного знака E и ток проводимости $j_\Omega = \sigma E$, такой, что при $t=0$ имеет место равенство $j(r) = j_\Omega(r) + j_Q(r) = 0$. Далее в соответствии с уравнением (3.129) происходит диффузионное распыливание профиля $j_\Omega(r)$ и появляется ненулевая плотность полного тока j (рис. 3.17,б). По прошествии времени, несколько превышающего L_{int}/R , образуется распределение плотности тока j и поля E , по-

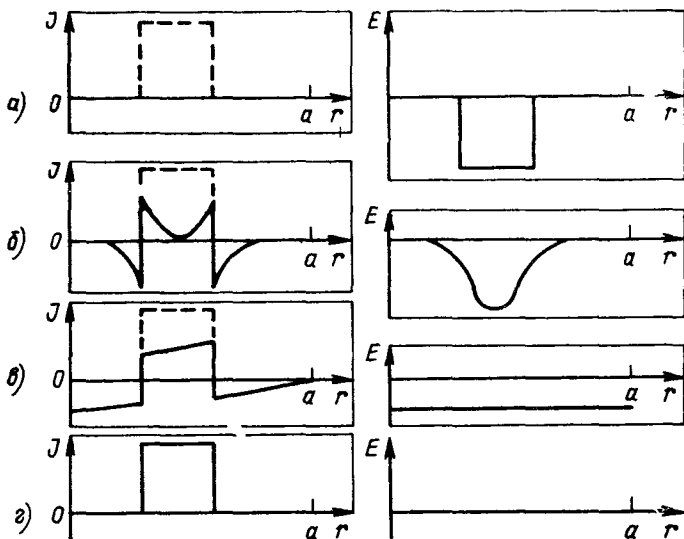


Рис 3.17. Эволюция радиальных распределений плотности тока $j(r, t)$ и напряженности электрического поля $E(r, t)$ в предположении, что профиль стороннего тока $j_Q(r)$ поддерживается неизменным во времени

казанное на рис. 3.17,в. Если внешними условиями поддерживается постоянный полный ток I (в нашем примере $I=0$), то на этом процесс формирования профиля тока завершен. Очевидно, что внешние условия задают нулевое напряжение обхода, как это имеет место в безындукционном токамаке, и происходит переход от распределений j и E , показанных на рис. 3.17,б, к распределениям рис. 3.17,г. При этом полный ток плазмы возрастает от $I \approx 0$ до значения $I(t \rightarrow \infty)$, поддерживаемого безындукционным источником тока. Эта последняя стадия процесса в несколько раз по длительности превосходит предыдущую, и только она описывается в рамках нуль-мерного приближения. Отметим в заключение, что в современных токамаках скин-время плазменного шнура имеет масштаб нескольких секунд и обычно сравнимо с временем разряда. В реакторе-токамаке скин-время возрастает до сотен и даже тысяч секунд, поэтому влияние электрического поля на разряд исключается только в полностью стационарном режиме работы.

В разобранный выше примере не обсуждалась величина поглощенной мощности внешнего источника тока p_Q . Очевидно, что эта величина будет разной в начале и в конце процесса. Действительно, в конечном состоянии, показанном на рис. 3.17,г, второе слагаемое в (3.131) отсутствует, и поглощаемая мощность p_Q расходуется только на столкновительную диссипацию p_S . Мощность, необходимая для создания того же профиля неиндукционного тока j_Q в начальный момент времени $t=0$, может быть существенно боль-

ше. Это видно из того, что при $t=0$ соотношение (3.131) можно переписать как

$$p_Q(t=0) = j_Q/\eta + j_\Omega E = p_C + p_\Omega, \quad (3.133)$$

откуда

$$\frac{p_Q(t=0)}{p_Q(t=\infty)} = 1 + \frac{p_\Omega}{p_C} = 1 + \eta E.$$

Таким образом, мощность, поглощенная в начальный момент времени, определяется соотношением между эффективностью индукционного и безындукционного методов генерации тока.

В представленном на рис. 3.17 модельном примере неявно предполагалось, что мощность источника неограничена и всегда обеспечивает фиксированный профиль неиндукционного тока. Более реально, по-видимому, другая постановка задачи, когда задана мощность источника, а профиль плотности тока определяется соотношением слагаемых в (3.133), причем теперь уже профили плотности стороннего тока j_Q в начальный и конечный моменты времени могут существенно различаться. Такая задача была решена в [199], где рассматривался сценарий безындукционного создания тока в установке ИНТОР. Предполагалось, что на стадии ионизации создается плазма с параболическим профилем плотности $n(r) = n_0(1 - r^2/a^2)$, который в дальнейшем сохраняется неизменным. Далее в плазму вводится 3 МВт мощности в виде бегущей НГ-волны со спектром вида

$$W_{v_{\parallel}}(a, v_{\parallel}) = \begin{cases} W_0(v_{\parallel}^2 - v_0^2)^2 & \text{при } v_0 \leq v_{\parallel} \leq v_1, \\ W_0(v_1^2 - v_0^2)^2 & \text{при } v_1 \leq v_{\parallel} \leq v_2, \\ 0 & \text{при } v_{\parallel} < v_0 \text{ или } v_{\parallel} > v_2 \end{cases} \quad (3.134)$$

(обозначения такие же, как в п. 3.3.2).

Последующая эволюция определялась на основе решения системы уравнений (3.127)–(3.131) с краевым условием для тока вида (3.64) и $U_{\text{ext}}=0$. На рис. 3.18 показан профиль НГ-тока в начальный момент времени ($t=0$, штриховая линия) и после диссипации антитока при $t=150$ с. В конечном состоянии электронная температура на оси составила 1 кэВ. Видно, что в начальный момент мощность источника в значительной степени расходуется на преодоление силы торможения электронов индукционным электрическим полем [второе слагаемое в (3.133)]. Поэтому вся мощность источника (3 МВт) расходуется на внешней трети радиуса плазмы, и внутри ток не создается. Такое скинирование профиля выделяемой мощности тем сильнее, чем ниже проводимость плазмы. Дальнейшая эволюция профиля тока напоминает показанную на рис. 3.17.

Отметим, что при подъеме тока безындукционными методами происходит скинирование плотности тока, аналогичное скинированию при подъеме тока с помощью индуктора. Основное различие

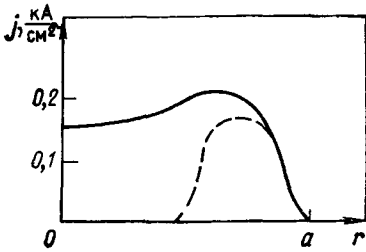


Рис. 3.18. Профили плотности НГ-тока $j_{\text{НГ}}(r)$ для установки ИНТОР в начале стадии подъема тока $t=0$ (штриховая линия) и в стационарной стадии (сплошная линия). Параметры плазмы такие же, как и на рис. 3.13, за исключением $n_{e0} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 1 \text{ кэВ}$ [199]

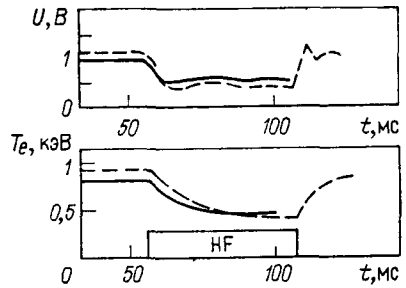


Рис. 3.19. Численное моделирование эксперимента по поддержанию тока на установке JFT-2 с параметрами $R_0 = 90 \text{ см}$, $a = 28 \text{ см}$, $B_0 = 1 \text{ Тл}$, $\bar{n}_e = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$: — расчет [199]; - - - эксперимент [201]

этих двух способов состоит в том, что безындукционный подъем тока может приводить (как в случаях, показанных на рис. 3.17, 3.18) к знакопеременной плотности полного тока j . Из закона Ома (3.130) видно, что этого эффекта можно избежать, если поддерживать профиль таким, чтобы обеспечивать неравенство $|j_Q| \geq |\sigma_s E|$. Индукционный подъем тока можно провести без скинирования, если поднимать ток достаточно медленно [200]. В принципе, формируя радиальный профиль j_Q или медленно увеличивая вводимую мощность, можно обеспечить монотонный профиль j и при безындукционном подъеме тока, однако этот вопрос пока еще не изучен. Не исследована и МГД-устойчивость профилей тока, образующихся в процессе безындукционного создания разряда в токамаке.

3.4.3. Перегревная неустойчивость профиля НГ-тока. В одном из первых экспериментов по поддержанию тока в токамаке НГ-волнами [201] было обнаружено, что введение в плазму дополнительной мощности приводит к одновременному падению температуры электронов и напряжения обхода (штриховые кривые на рис. 3.19). Этот эксперимент убедительно продемонстрировал генерацию тока и был промоделирован в [183] с помощью системы (3.127) — (3.131). Результаты численного моделирования показаны на рис. 3.19. В расчете ионная теплопроводность считалась неоклассической, электронная теплопроводность $\kappa_e = 10^{17} (\text{см} \cdot \text{с})^{-1}$, бутстреп-ток не учитывался ($j_b = 0$), кроме того, предполагалось, что полный ток не меняется и составляет $I = 70 \text{ кА}$. Профиль НГ-тока рассчитывался так, как это описано в предыдущем параграфе без учета тороидальных эффектов. Спектр волн в расчете имел модельную прямоугольную форму в диапазоне продольных волновых чисел, соответствующем области энергий резонансных электронов от 2 до 20 кэВ. Даже в такой простой модели результаты

расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными при вводимой мощности 40 кВт. Из расчетов следует, что НГ-волны создают ток 45 кА.

Интересная особенность рассмотренного эксперимента состоит в том, что введение дополнительной мощности приводит к остыванию плазмы. Связано это с тем, что падение мощности джоулева нагрева превышает дополнительную мощность, что выражается неравенством

$$1 - P_Q/P_{Дж} > (1 - I_Q/I)^2. \quad (3.135)$$

Здесь $P_{Дж}$ — джоулева мощность, диссипируемая током плазмы I перед включением НГ-мощности. Если ввести эффективность генерации индукционного тока соотношением

$$\eta_{Дж} = I/P_{Дж} = 1/U, \quad (3.136)$$

аналогичным ранее введенной эффективности генерации безындукционного тока

$$\eta_Q = I_Q/P_Q, \quad (3.137)$$

то условие (3.166) можно переписать в виде

$$\eta_{Дж}/\eta_Q < 2 - I_Q/I. \quad (3.138)$$

Отсюда видно, что с введением дополнительной мощности P_Q для генерации тока плазма может остывать, если эффективность такой генерации η_Q достаточно велика: $\eta_Q > \eta_{Дж}/2$. Любопытно, что плазма может остывать, даже если $\eta_Q < \eta_{Дж}$, но вводимая мощность не очень велика, и ток плазмы I не замещается полностью, т. е. $I_Q < I$. Это обстоятельство связано с разной степенью зависимости диссипируемой мощности от тока. В законе Джоуля — Ленца $P_{Дж} = RI^2$ мощность пропорциональна квадрату тока, а при неиндукционной генерации тока мощность линейна по току (3.137). Оценки показывают, что условие (3.138) для НГ-метода генерации тока выполняется только для небольших токамаков в режимах с малой плотностью плазмы.

Предположим, что условие (3.138) выполнено, тогда оказывается, что в этом случае в токамаке нельзя создать ток без дополнительного нагрева. В эксперименте на JFT-2 [201] роль такого дополнительного нагрева играла остаточная джоулева мощность, отбираемая у индуктора. Если бы этот эксперимент производился с фиксированным током в обмотке индуктора, как в более поздних экспериментах на установке PLT [184], то можно было бы ожидать, что охлаждение плазмы привело бы к уменьшению взаимодействия резонансных электронов с волной, в результате чего упала бы поглощенная мощность, и ситуация оказалась бы неустойчивой.

Более интересно другое проявление этой же неустойчивости, соответствующее распространенному случаю $\eta_Q < \eta_{Дж}/2$. В этом случае генерация НГ-тока сопровождается увеличением темпера-

туры и приводит к эффекту, напоминающему перегревную неустойчивость омической плазмы. Характер температурной зависимости профиля НГ-тока ясен из рис. 3.13, откуда видно, что при заданной излучаемой мощности увеличение температуры ведет к более периферийному поглощению энергии и, следовательно к скинированию тока. Из-за того при этом область генерации тока смещается в зону меньшей плотности, увеличиваются эффективность генерации и величины тока. Аналогичная зависимость имеет место и в расчетах по более полной модели работы [186], учитывающей тороидальные и некоторые другие эффекты.

В таком «перегретном» варианте описанная неустойчивость открывает интересную возможность стабилизации термоядерной перегретой неустойчивости горения [183]. Предположим, что ток в реакторе поддерживается с помощью источника НГ-волн. Поскольку сечение $D-T$ -реакции увеличивается с ростом температуры, то при некоторых дополнительных условиях реактор может попасть в режим неустойчивого увеличения температуры. Однако с возрастанием температуры плотность НГ-тока на оси сильно падает, в центре плазмы возникает зона повышенного ионного теплопереноса, пропорционального B_θ^{-2} . В результате неустойчивость горения может быть подавлена, хотя ввиду сильного различия энергетического τ_E и скин-времени $\tau_{sk} \gg \tau_E$ этот вопрос требует более детального рассмотрения.

3.4.4. Особенности генерации тока альфвеновскими волнами.

В ряде работ [178, 202] моделировалась динамика генерации тока А-волнами. Для этого система уравнений (3.126) — (3.130) была дополнена системой уравнений Максвелла для расчета волновых полей в плазме. В [178] проведен расчет профилей тока и поглощенной мощности для метода генерации тока, основанного на трансформации быстрой магнитозвуковой волны (БМЗ) в альфвеновскую (А) моду. В этом методе возбуждаемая на периферии плазмы БМЗ-волна распространяется в глубь плазмы и вблизи поверхности локального альфвеновского резонанса

$$\omega = k_{\parallel}(r) v_A(r) \quad (3.139)$$

трансформируется в сильнозатухающую плазменную А-моду, которая быстро поглощается за счет механизма Ландау. Поэтому радиальный профиль тока имеет форму узкого пика с максимумом на внешней из поверхностей, удовлетворяющих условию (3.139). Требуемый профиль тока при использовании этого метода генерации можно получить, возбуждая несколько волн с разными частотами ω или волновыми векторами k_{\parallel} .

Обратим внимание на специфическую особенность данного метода. Зона локализации тока определяется условием (3.139). Перепишем это условие в упрощенном виде, пренебрегая тороидальными поправками:

$$\omega = \omega_A(r) \equiv \frac{B_z}{R_0 \sqrt{4\pi M n_e(r)}} \left(n + \frac{m}{q(r)} \right). \quad (3.140)$$

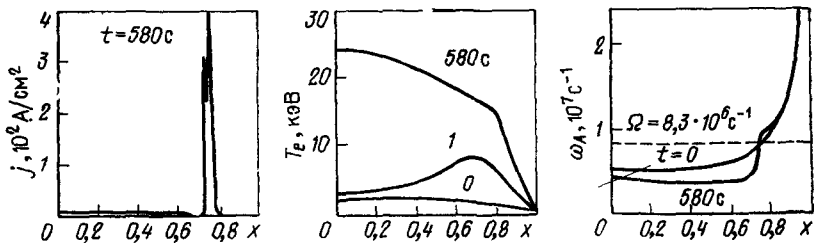


Рис. 3.20. Стационарные профили плотности тока j , температуры электронов T_e и альфвеновской частоты ω_A для реактора-токамака с альфвеновским поддержанием тока $R_0=5$ м, $a=1.2$ м, $B_0=5$ Тл, $I=5$ МА, $\omega=8.3 \cdot 10^6$ рад/с, $m=3$, $n=4$. Представлены результаты работы [178]

Если условие (3.140) выполнено в нескольких точках по радиусу, то ток генерируется в окрестности внешней из них. Видно, что условие резонанса из-за входящего в него коэффициента запаса устойчивости $q(r)$ зависит от профиля генерируемого тока. Это обстоятельство отличает альфвеновский метод генерации тока от остальных методов и приводит к интересному явлению, о котором речь пойдет ниже.

Предположим, что ток генерируется локально в некоторой точке $r=r_A$. Тогда, как следует из уравнения (3.129) и качественно понятно из рис. 3.17, на величине $q(r)$ возникает «дипольное» возмущение. В уравнении (3.140) появляется, как правило, несколько дополнительных корней, причем точка r_A в результате эволюции движется к границе. Если волновые числа n и m имеют одинаковый знак, то процесс выходит в стационарное состояние (рис. 3.20). Здесь представлены профили тока $j(r)$, электронной температуры $T_e(r)$ и локальной альфвеновской частоты $\omega_A(r)$. Поскольку эффективность генерации тока А-волнами пропорциональна $(T_e^3/n_e)^{1/2}$, то она возрастает во времени, и в стационарной стадии разряда для поддержания тока 5 МА достаточно 10 МВт вводимой мощности.

Иначе обстоит дело, если $mn < 0$. Считая профиль $n_e(r)$ фиксированным, проследим за изменением $q(r)$ во времени. Как уже говорилось, деформация $q(r)$ происходит таким образом, что точка r_A движется наружу. Анализ условия (3.140) показывает, что при $mn < 0$ рядом с r_A находится другой корень уравнения (3.140). А так как процесс происходит при постоянном токе I и, значит, при фиксированном значении $q(a, t) = \text{const}$, то при выходе точки r_A на периферию она сливается с соседней резонансной точкой. В этот момент пара корней уравнения (3.140) исчезает, внешней оказывается другая, более глубокая резонансная поверхность, а волна проникает глубже в плазму и поглощается ближе к центру плазменного шнура. Далее картина повторяется. Эта динамика показана на рис. 3.21. Из-за того, что изменения $j(r, t)$ очень малы, описанные релаксационные колебания имеют характерные времена существенно меньше скин-слоя времени плазмы. Это, в

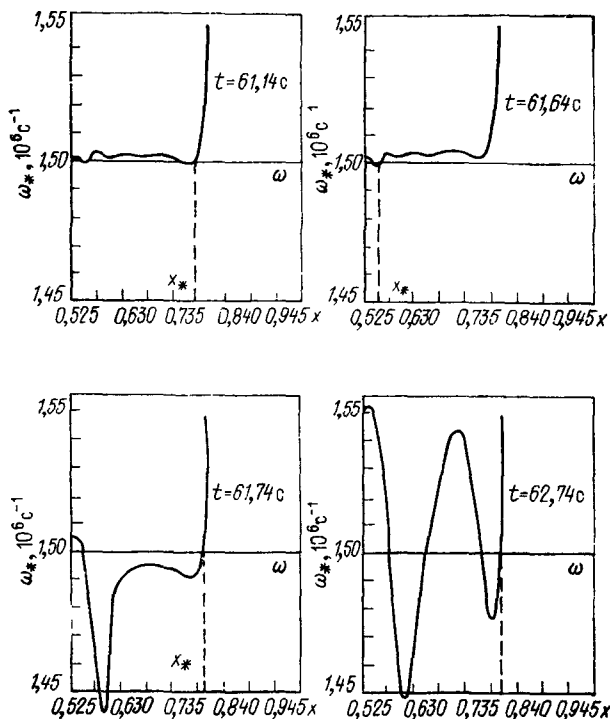


Рис. 3.21. Релаксационные колебания профиля плотности тока [202]. Показаны профили локальной альфвеновской частоты $\omega_A(r)$ для нескольких последовательных моментов времени

свою очередь, приводит к тому, что плазма «помнит» предысторию процесса. Картина еще более запутывается наложением прямых и обратных токов и их взаимной компенсацией, которая также происходит за времена, меньшие скиновых. В результате область поглощения энергии и генерации тока совершает релаксационные колебания в пределах $0,3a \leq r_A \leq 0,8a$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше неоднократно подчеркивалось, что конечная цель теории генерации тока в токамаке безындукционными методами — это адекватное описание эксперимента и выдача рекомендаций о возможности использования того или иного метода в реакторе-токамаке.

По этой причине обзор был построен так, чтобы от упрощенных идеализированных теоретических построений подвести читателя к более сложным моделям, достаточно полно описывающим экспериментальную ситуацию. При этом естественно возникает вопрос: какова же степень соответствия между современным состоянием

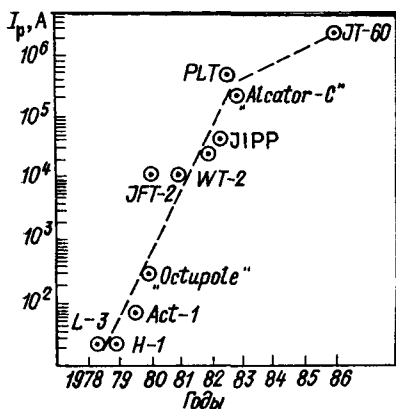


Рис. 4.1. Значения НГ-тока, полученные на различных установках в различное время

абсолютное значение достигнутого квазистационарного тока увеличилось более чем на четыре порядка (рис. 4.1). Последний по времени и самый крупный по масштабам эксперимент был выполнен на японской установке JT-60, где при совместном использовании НГ-волн и пучков нейтральных атомов в плазме с $\bar{n}_e = 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ был достигнут ток $I_p = 2 \text{ МА}$ [204].

Большая часть экспериментов была выполнена с использованием НГ-волн [205—210], в части установок для генерации тока использовалась инжекция нейтральных атомов [211—213]. В последнее время появились данные об использовании АВ- [214, 215], ЭЦ-волн [216, 217] и БМЗ-волн [218, 219].

Эксперименты по генерации тока безындукционными методами можно условно разделить на три класса. Самый представительный из них составляют разряды, в которых созданный исходно омический ток замещается током безындукционным. Далее ток поддерживается внешним безындукционным источником на ква-

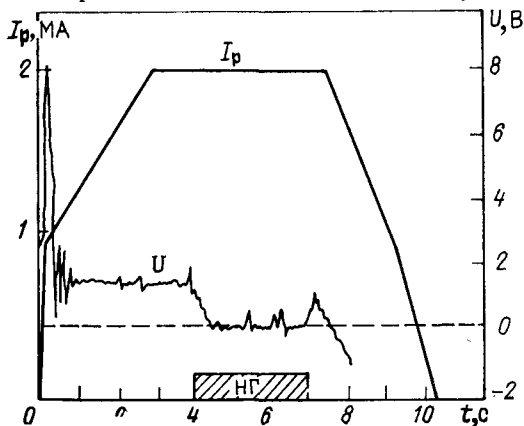
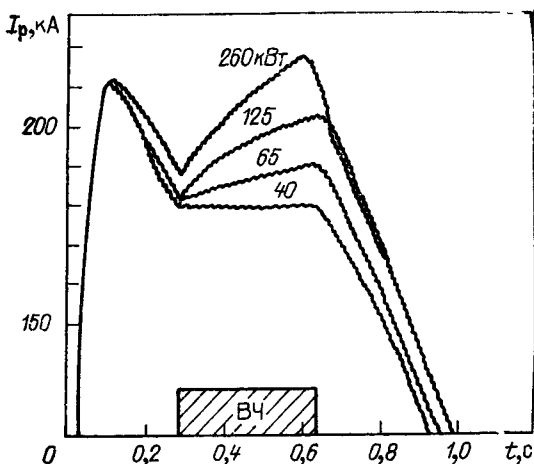


Рис. 4.2. Зависимость I_p и U от времени на установке JT-60 [204]. Время действия источника НГ-волн показано штриховкой

Рис. 4.3. Зависимость I_p от времени при подъеме тока НГ-волнами на токамаке PLT [226] при разных значениях $R_{\text{НГ}}$



зистационарном уровне в течение достаточно длительного времени $\tau \geq 1$ с (рис. 4.2). Ко второму классу относятся эксперименты, в которых ставилась задача максимально быстрого подъема тока безындукционным методом с некоторого начального уровня, также задаваемого омической фазой разряда (рис. 4.3). Сюда же можно отнести и эксперименты по перемагничиванию индуктора, в которых из-за наличия сильной индуктивной связи с первичной обмоткой полный ток в плазме практически не меняется во времени, а возникающее отрицательное вихревое электрическое поле приводит к изменению магнитного потока индуктора. И, наконец, в третьем (самом малочисленном) классе экспериментов исследовалась возможность получения разряда в токамаке только с помощью безындукционных методов, включая пробой газа и стадию подъема тока с нулевого начального уровня (рис. 4.4).

Разберем здесь лишь наиболее продвинутые эксперименты, где в качестве источника безындукционного тока использовались НГ-волны. По всем остальным методам объем информации пока что слишком мал. Пожалуй, лишь эксперименты с использованием пучков нейтральных атомов допускают сравнение с теорией. Анализ этих экспериментов был проведен в [213] и показал удовлетворительное согласие с теорией для эффективности генерации тока η_p .

Начнем с экспериментов первого класса. Прежде всего в них было показано, что в соответствии с теорией эффективность генерации тока $\eta_{\text{НГ}}$ обратно пропорциональна плотности плазмы, $\eta_{\text{НГ}} \sim n_e^{-1}$ (рис. 4.5). Эта зависимость проверена в широком диапазоне значений плотности $10^{12} \text{ см}^{-3} \leq \bar{n}_e \leq 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и выполнялась во всех случаях, когда частота генератора ω по крайней мере в 2 раза превышала частоту НГ-резонанса $\omega \geq 2\omega_{\text{НГ}}$. С уменьшением частоты эффективность $\eta_{\text{НГ}}$ резко падала либо из-за появляющегося нагрева ионов, либо из-за различных нелинейных эффектов. В лучших разрядах экспериментальное значение $\eta_{\text{НГ}}$ в 2—3 раза меньше теоретического значения, определяемого формулой (2.147) для широкого спектра НГ-волн. Такое соответствие

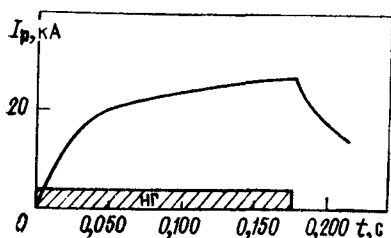


Рис. 4.4. Зависимость I_p от времени при безындукционном старте разряда на токамаке Т-7 [217]

периментах наблюдалась предсказанная теорией «веерная» неустойчивость [220—222], ограничивающая η_{HG} ниже ее оптимального значения. Проведены детальные исследования по влиянию формы спектра НГ-волн на эффективность генерации тока [223, 224], причем полученные данные также находятся в согласии с теорией. Все эти результаты позволяют уверенно сказать, что в современных токамаках с размерами $a=45$ см, $R=150$ см в режимах с умеренной плотностью $\bar{n}_e \leq 5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$ НГ-волны генерируют ток в основном в соответствии с теоретическими представлениями.

Гораздо меньше информации получено о профилях НГ-тока и о процессах переноса, контролирующих поведение пучка быстрых электронов. В последних экспериментах на установке «Asdex» [230] был измерен профиль НГ-тока в режимах с подавлением пилообразных колебаний. Этот профиль оказался немного шире омического, но детального сравнения с теоретическими расчетами до настоящего времени сделано не было. Что касается поведения пучка быстрых электронов, то в ряде экспериментов на установ-

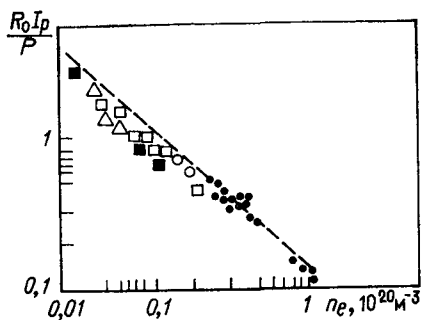


Рис. 4.5. Экспериментальная зависимость η_{HG} от плотности плазмы [224], где R_0 —большой радиус токамака, м; I_p —ток, А; P —вводимая ВЧ-мощность, Вт

можно считать достаточно хорошим, поскольку формула (2.147) получена в идеализированном случае однородной плазмы и не учитывает, например, таких факторов, как несовершенство спектра НГ-волн, конечность времени жизни быстрых электронов и т. д. Хорошо соответствует теории и измеренная форма функции распределения пучка надтепловых электронов (рис. 4.6). Во многих экс-

periments предсказанная теорией «веерная» неустойчивость [220—222], ограничивающая η_{HG} ниже ее оптимального значения. Проведены детальные исследования по влиянию формы спектра НГ-волн на эффективность генерации тока [223, 224], причем полученные данные также находятся в согласии с теорией. Все эти результаты позволяют уверенно сказать, что в современных токамаках с размерами $a=45$ см, $R=150$ см в режимах с умеренной плотностью $\bar{n}_e \leq 5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$ НГ-волны генерируют ток в основном в соответствии с теоретическими представлениями.

Гораздо меньше информации получено о профилях НГ-тока и о процессах переноса, контролирующих поведение пучка быстрых электронов. В последних экспериментах на установке «Asdex» [230] был измерен профиль НГ-тока в режимах с подавлением пилообразных колебаний. Этот профиль оказался немного шире омического, но детального сравнения с теоретическими расчетами до настоящего времени сделано не было. Что касается поведения пучка быстрых электронов, то в ряде экспериментов на установ-

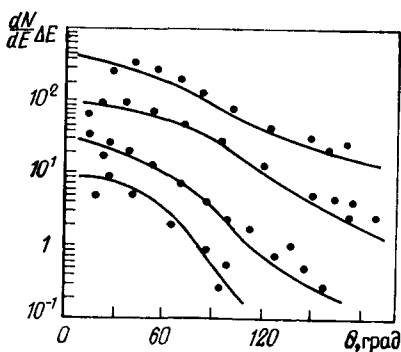


Рис. 4.6. Экспериментальное распределение тормозного излучения пучка быстрых электронов в зависимости от угла наблюдения и расчетная форма излучения (сплошные линии) на токамаке

ках PLT и Alcator-C наблюдался аномальный уход этих электронов на стенки камеры, приводивший к сильному распылению дифрагмы. В ряде экспериментов получены данные [224, 225] о деградации энергетического времени жизни плазмы при генерации тока НГ-волнами в соответствии со скейлингом Кея — Голдстона. Однако в этой области объем информации явно недостаточен, и для окончательного вывода требуются дополнительные эксперименты.

Обширные исследования проведены и по второму классу экспериментов — по подъему тока НГ-волнами и по перемагничиванию индуктора. Выше уже отмечалось, что большинство экспериментальных точек дают зависимость η_{el} от безразмерного параметра $v_1^2/v_{кр}^2$ в очень хорошем соответствии с теорией «наведенной» проводимости. Эксперименты показали также нелинейную зависимость скорости роста тока от мощности источника НГ-волн [150, 226] (рис. 4.3). В экспериментах на установке «Alcator-C» было обнаружено существование оптимальной мощности $P_{opt} \approx \approx 3\gamma_{НГ} I_p$. Эти выводы находятся в соответствии с теорией, учитывающей влияние нагрева плазмы на скорость роста тока. К сожалению, во всех проведенных экспериментах по подъему тока НГ-волнами практически не получено систематических данных ни о динамике основного компонента плазмы, ни о динамике пучка, что затрудняет детальное сопоставление с теоретическими расчетами.

И, наконец, третий класс экспериментов — безындукционный старт разряда. Он наименее исследован не только экспериментально, но и теоретически. Как правило (кроме PLT), такие эксперименты проводятся с использованием НГ- и ЭЦ-волн — последние очень эффективны на стадии пробоя газа [227—229]. Отличительной чертой всех экспериментов этого класса является очень маленькая электронная плотность $\bar{n}_e \leq 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (исключение составляют результаты токамака Т-7, где для пробоя и ионизации плазмы использовался мощный гиротрон с $P \sim 200 \text{ кВт}$, позволивший получить $\bar{n}_e \geq 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$). К сожалению, в плазме со столь низкой температурой и плотностью очень трудно измерить не только параметры пучка, но и, например, распределение $T_e(r)$. Поэтому основная экспериментальная информация — это зависимость скорости роста тока от времени, мощности источника и значения вертикального магнитного поля (рис. 4.4). Из рисунка, в частности, следует, что вслед за сравнительно коротким ($\tau \leq 30 \text{ мс}$) периодом быстрого роста тока наступает период «насыщения», когда значение dI/dt значительно ниже начального. Этот факт также находит свое объяснение в теории, учитывающей нагрев плазмы. И, наконец, отметим, что зависимость протекающего по плазме тока от вертикального магнитного поля на стадии пробоя также соответствует теоретическим представлениям, развитым в [26].

Из краткого сопоставления можно сделать вывод, что, по крайней мере, для НГ-волн основные результаты находятся в разум-

ном согласии с данными экспериментов. Если рискнуть провести экстраполяцию этого соответствия на условия реактора-токамака, т. е. воспользоваться для оценки эффективности генерации тока быстрыми волнами формулой (2.147), то результат будет следующий. Для токамака с параметрами ИНТОРа ($a=1,2$ м, $R_0=5$ м, $\bar{n}_e=10^{14}$ см⁻³, $T_e=20$ кэВ) для генерации тока $I=8$ МА необходимо иметь источник НГ-волн мощностью $P=60$ МВт. Эта цифра приемлема с точки зрения экономичности реактора, но, конечно, может рассматриваться только как ориентир для качественной оценки ситуации.

Список литературы

1. Ohkawa T.// Nucl Fus. 1970 Vol. 10 P 185—188
2. Wort D. J. M.// Plasma Phys 1971. Vol 13 P. 258—262.
3. Kadomtsev V. B., Shafranov V. D.// Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA. Vienna, 1971 Vol. 2. P. 479—489.
4. Bickerton R. J., Connor J. W., Taylor J. B.// Nature 1971. Vol 229. P. 110—115
5. Параил В. В.// Высокочастотный нагрев плазмы. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С 253—280
6. Fisch N. J.// Rev. Mod. Phys. 1987. Vol. 59. P 175—234.
7. Fisch N. J.// Nucl. Fus 1984 Vol. 24. P 378—386.
8. Bevir M. K., Gray J. W.// Proc. of RFP Theory Workshop, Ed. H. R. Lewis and R. A. Gerwin, Los Alamos Rep. LA-89-44-C. P. 176.
9. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973. Вып 7. С. 205—273.
10. McNally I. R. ORNL/TM-6492, 1968
11. Goloborod'ko V. YA., Kolesnichenko Ya. I., Vavorsky V. A.// Nucl. Fus. 1983, Vol 23 P. 399—406.
12. Колесниченко Я. И., Путвинский С. В., Резник В. А. и др.// Физика плазмы. 1981. Т. 7 С 803—809.
13. Ohkawa T. General Atomic Company Rep. NA13847, 1986.
14. Parks P. B., Marcus F. B.// Nucl Fus. 1981. Vol. 21 P. 1207—1212
15. Fisch N. J., Boozer A. M.// Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 720—722.
16. Голянт В. Е., Федоров В. И. Высокочастотные методы нагрева плазмы в тороидальных термоядерных установках. М.: Энергоатомиздат, 1986
17. Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965
18. Электродинамика плазмы/ Под ред. А. И. Ахизера. М.: Наука, 1974.
19. Klima R./ Plasma Phys. 1973. Vol. 15. P 215—227.
20. Клима Р., Лонгинов А. В.// Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 496—503.
21. Высокочастотный нагрев плазмы. Горький: ИПФ АН СССР, 1983.
22. Gramilla M.// Nucl. Fus 1976. Vol. 16 P. 47—54
23. Кадомицев Б. Б., Погуце О. П.// Журн эксперим и теорет. физ. 1967. Т. 63. С. 2025—2036.
24. Шапиро В. Д., Шевченко В. И.// Там же. 1968 Т 54 С. 1187—1202.
25. Параил В. В., Погуце О. П.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича М.: Энергоатомиздат, 1981. Вып 11 С. 3—55
26. Vojtseckovich I. A., Parail V. V., Pereverzev G. V.// Plasma Phys and Control Nucl Fus. Res IAEA Vienna, 1985. Vol. 3. P. 605—614.
27. Liu C. S., Chan V. S., Bhadra D. K., Harvey R. W.// Phys. Rev Lett. 1982. Vol 48 P 1479—1482
28. Karney C. F. F.// Phys. Fluids 1979 Vol. 22. P. 2188—2209.
29. Fomenko V. V.// Nucl Fus. 1975. Vol 15 P 1091—1097.
30. Connor J. W., Cordey J. G.// Ibid. 1974. Vol. 14. P. 185—190
31. Start D. F. H., Cordey J. C., Jones E. M.// Plasma Phys. 1980 Vol. 22. P 303—316.

32. Колесниченко Я. И., Резник В. А.// Физика плазмы 1981. Т. 7. С. 1003—1006.
33. Колесниченко Я. И., Резник В. А.// Там же. 1984. Т. 10. С. 229—235.
34. Полевой А. Р./ Препринт ИАЭ № 3966/6 М., 1984.
35. Cordey J. C., Edlington T., Start D. F. H.// Plasma Phys. 1982. Vol. 24. P. 73—81.
36. Taguchi M.// J. Phys. Soc. Jap. 1983 Vol. 52. P. 2035—2047.
37. Dnestrovskij Yu. N., Parail V. V., Kostomarov D. P. e. a.// 12th Europ. Conf. on Control Fus and Plasma Phys. Budapest, 1985. Vol. 2. P. 200—203.
38. Fisch N. J.// Nucl. Fus 1981. Vol. 21. P. 15—22.
39. Iton S. I., Fukuyama A., Goto A. e. a.// Plasma Phys and Control. Nucl. Fus. Res IAEA Vienna, 1985. Vol. 1. P. 541—548.
40. Лонгинов А. В., Степанов К. Н.// Высокочастотный нагрев плазмы. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 195—210
41. Vdovin V. L.// 14th Europ. Conf. on Contr. Fus and Plasma Phys. Madrid, 1987. Vol. 3. P. 1045.
42. Dawson J. M., Kaw P. K.// Phys Rev. Lett. 1982 Vol. 48. P. 1730—1733
43. Conn R. W., Dawson J. M., Cogan B. G. e. a.// Tokamak Concept Innovation. IAEA-TECDOC-373. Vienna, 1986. P. 589—592.
44. Трубинов Б. А.// Вопросы теории плазмы/ Под ред М А Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973 Вып. 7. С. 274—300.
45. Sigmar D. J.// Nucl. Fus. 1973. Vol. 13. P. 17—26.
46. Parail V. V.// Tokamak Concept Innovation. IAEA-TECDOC 373. Vienna, 1986. P. 227—230
47. Molvig K., Lidsky L. M., Hizandis K. e. a.// Comments on Plasma Phys. Contr. Fus. 1982. Vol 7 P. 113—121.
48. Nawryluk R. J., Arunasalam V., Bell M. J. e. a.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res IAEA Vienna, 1987. Vol 1 P. 51—64.
49. Hogan J.// Tokamak Concept Innovation IAEA-TECDOC-373. Vienna, 1986. P. 214—222
50. Liewer P. C.// Nucl. Fus 1985. Vol. 25 P. 543—621.
51. Основы физики плазмы/ Под ред П З Сагдеева и М Розенблюта М.: Энергоатомиздат, 1983
52. Goldston R. Y.// Plasma Phys. and Contr. Fus 1984. Vol. 26. P. 87—104
53. Leonov V. M. e. a.// Plasma Phys and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA Vienna, 1987. Vol. 1 P. 51—64.
54. Knoepfel H., Spong D. A.// Nucl. Fus 1979 Vol 19. P. 785—830
55. Fisch N. J.// Phys Fluids 1985. Vol. 28 P. 245—247.
56. Войцехович И. А., Параил В. В., Переверзев Г. В.// Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46 С. 20—23.
57. Krashennnikov S. I., Parail V. V., Pereverzev G. V., Soboleva T. K.// INTER — Phase IIA Workshop, March, Brussels 1986. Vol. 4 P. 228—242
58. Parlange F., Agarici G., Blanc P. e. a.// 12th Europ. Conf. on Control Fusion and Plasma Phys Budapest, 1985. Vol. 2 P. 172—175.
59. Stevens R., Bell S., Bernabei S. e. a.// Ibid Vol 2 P. 192—195
60. Soeldner F., Eckhardt D., Leuterer F. e. a.// 13th Europ Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys Schliersee, 1986 Vol 2 P. 319—322
61. Rosenbluth M. N., Hazeltine R. D., Hinton F. L.// Phys. Fluids. 1972 Vol 15. P. 116—140
62. Hinton F. L., Hazeltine R. D.// Rev Mod Phys 1976 Vol. 2 P. 239—308
63. Sigmar D. J., Rutherford P. H.// Nucl. Fus. 1973. Vol. 13. P. 677—683
64. Stringer T. E.// Plasma Phys. 1974. Vol. 16. P. 651—659.
65. Яворский В. А. Траектории частиц в приосевой области токамаков. Препринт КИЯИ-77-4 Киев, 1977
66. Колесниченко Я. И., Фурса А. Д., Яворский В. А.// Физика плазмы. 1976. Т. 2 С. 911—921.
67. Kolesnichenko Ya. I.// Nucl. Fus 1980. Vol. 20. P. 727—780
68. Nocentini A., Tessarotto, Engelmann F.// Nucl. Fus 1975. Vol. 15 P. 359—370.
69. Rosenbluth M. N., Rutherford R. H., Taylor J. B. e. a.// Plasma Phys. Contr. Nucl Fus Res IAEA, Vienna, 1971 Vol. 1. P. 495—508.

70. Kolesnichenko Ya. I., Anderson V. A., Lisak M., Wilhelmsson H.// Phys Rev. Lett. 1984. Vol. 53 P 1825—1828.
71. Kolesnichenko Ya. I., Yavorskij V. A., Kirov A. G., Stotland M. A.// Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1983. Vol. 3. P. 349—355.
72. Berry L. A., Bush C. E., Callen J. D. e. a.// Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1977. Vol 1. P. 49—68
73. Hugill J., Fielding S. J., Gill R. D. e. a.// Proc. VIII Europ. Conf. on Plasma Phys and Contr. Nucl. Fus Prague, 1977 Vol. 1. P. 39
74. Demirkhanov R. A., Kirov A. G., Ruchko L. F.// Proc. X Europ Conf on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Moscow, 1981. Vol. 1. P. E7
75. Cordey J. G., Jones E. M., Start D. F. H. e. a.// Nucl. Fus. 1979. Vol. 19. P 249—259.
76. Kovrizhnikh L. M. ICTP, Trieste. Rep. IC/70/124 1970
77. Connor J. M., Grimm R. C., Hastie R. J., Keeping P. M.// Nucl. Fus. 1973. Vol. 13. P. 211—220
78. Cordey J. G., Core W. G. F.// Phys. Fluids 1974. Vol 17. P. 1626—1630
79. Start D. F. H., Cordey J. G., Jones E. M.// 9th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys. Oxford, 1979. P. 167.
80. Goloborod'ko V. Ya., Kolesnichenko Ya. I., Yavorskij V. A.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1985 Vol 2 P 179—187
81. Eubank H. P., Grisham L. R., Kozub T. A. e. a.// Heating in Toroidal Plasmas. CEC, Brussels, 1980. Vol. 2 P. 701—710
82. Goldston R. J., Davis S., Eubank H. e. a.// Ibid. P 711—721
83. Suckewer S., Eubank H. P., Goldston R. J. e. a.// Nucl. Fus. 1983. Vol. 21. P. 1301—1310.
84. Isler R. C., Murray L. E., Crume E. C. e. a.// Ibid. 1983. Vol. 23. P. 1017—1037.
85. Кадомцев Б. Б., Морозов Д. Х., Поруце О. П.// Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 40 С 80—82.
86. Stacey W. M., Sigmar D. J.// Phys. Fluids. 1985. Vol. 28. P. 2800—2807.
87. Rome J. A., Callen J. D., Clarke J. F.// Nucl. Fus. 1974 Vol 14 P 141—151
88. Трубников Б. А.// Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963 Вып. 1. С 98—182.
89. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Плотник И. С.// Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 229—237.
90. Fisch N. J.// Phys. Rev. Lett 1978. Vol. 41. P. 873—876.
91. Ebst D. A.// Nucl. Fus. 1979. Vol. 19. P. 1369—1378
92. Bhadra D. K., Chu C., Harvey R. W., Prater R. GA-A15646, 1979
93. Yuen S. Y., Kaplan D., Cohn D. R.// Nucl. Fus. 1980. Vol. 20. P. 159—169.
94. Klima R.// Plasma Phys. 1973. Vol. 15. P. 1031—1038.
95. Klima R., Sizonenko V. L.// Plasma Phys. 1975 Vol 17. P. 463—471.
96. Klima R.// Czech J. Phys 1976. Vol. B26. P 638—645
97. Karney C. F., Fisch N. J.// Phys. Fluids. 1979. Vol. 22 P. 1817—1824.
98. Harvey R. W., Marx K. D., McCoy M. G.// Nucl. Fus. 1981. Vol. 21. P. 153—157.
99. Belikov V. S., Kolesnichenko Ya. I., Plotnik I. S.// Ibid. 1982. Vol. 22 P. 1559—1566
100. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Плотник И. С. Материалы делегации СССР, представленные на 15 сессию на фазе II-A международной рабочей группы ИИТОР (раздел «ВЧ-нагрев и поддержание тока») Вена, 1987.
101. Cordey J. C., Edlington T., Start D. F. H.// Plasma Phys 1982. Vol. 24, P. 73—76.
102. Fisch N. J., Karney C. E.// Phys. Fluids 1981 Vol. 24. P 27—39
103. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Плотник И. С. Доклад на совещании технического комитета МАГАТЭ по ВЧ-методам нагрева плазмы и поддержания тока Москва, 1987
104. Belikov V. S., Kolesnichenko Ya. I., Plotnik I. S.// Nucl. Fus 1983. Vol. 23. P. 1551—1560.
105. Захаров В. Е., Карпман В. И.// Журн эксперим и теорет. физ 1962. Т. 43. С 490—499.

106. Sugihara R., Midzumo Y., Fukuda M.// J. Phys. Soc Jap. 1981. Vol. 50. P. 2442—2451.
107. Елфимов А. Г.// Физика плазмы. 1983. Т. 9 С. 845—853.
108. Midzumo Y.// J. Phys. Soc. Jap. 1973. Vol. 34 P. 801—810.
109. Hazegawa A.// Nucl. Fus. 1980. Vol. 9. P. 1158—1160.
110. Fuchs V. R. e. a.// Phys. Fluids 1985 Vol. 28 P. 3619—3628.
111. Yoshicka K., Antonsen T. M.// Ibid. 1986. Vol. 26. P. 839—847.
112. Belikov V. S., Kolesnichenko Ya. I.// Plasma Phys. 1982 Vol. 24. P. 61—65.
113. Belikov V. S., Kolesnichenko Ya. I.// Nucl. Fus 1987. Vol. 27. P. 1371—1378.
114. Belikov V. S., Kolesnichenko Ya. I.// 12th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys. Budapest, 1985 Vol. 2. P. 208—211
115. Krlin L., Pavlo P., Tluchor Z., Gasek Z.// Plasma Phys. Contr. Fus. 1987. Vol. 29 P. 740—749
116. Belikov V. S., Kolesnichenko Ya. I., Plotnik I. S.// 14th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys. Madrid, 1987. Vol. 3 P. 1040—1043.
117. Войтеко Д. А., Демирханов Р. А., Карпов А. Г., Стогланд М. А.// Вопросы атомной науки и техники Сер Термоядерный синтез. 1980 Вып 1(5) С 45
118. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Плотник И. С.// Физика плазмы. 1984. Т. 10 С 672—680.
119. Eldridge O. C. Prepr. ORNL/M-7503 Oakridge, Tennessee, 1980.
120. Karney C. F. F., Fisch N. J.// Nucl. Fus. 1981. Vol. 21. P. 1549—1558.
121. Meyer R. L., Fidone I., Giruzzi G. e. a.// Phys. Fluids. 1985. Vol. 28. P. 127—132.
122. Yoshioka K., Antonsen T. M.// Nucl. Fus 1986 Vol. 26. P. 839—847
123. O'Brien M. R., Cox M., Start D. F. M.// Ibid. 1986. Vol. 26. P. 1626—1640.
124. Fidone I., Giruzzi G., Krivenski V. e. a.// Ibid. 1987 Vol. 27 P. 579—587.
125. Dnestrovskij Yu. N., Kostomarov D. P., Parail V. V. e. a.// Ibid. 1988. Vol. 28 P. 754—769
126. Hizandis K., Bers A.// Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. P. 2669—2575.
127. Antonsen T. M., Chu K. R.// Ibid. 1982 Vol. 25 P. 1295—1296
128. Taguchi M.// J Phys Soc Jap. 1983 Vol. 52. P. 2035
129. Antonsen T. M., Hui B.// IEEE Trans. Plasma Sci. 1984. Vol. PS-12. P. 118—125.
130. Chan V. S., Chin S. C., Hsu J. Y., Wong S. K.// Nucl. Fus. 1982. Vol. 22. P. 787—795.
131. Fisch N. J.// Phys. Rev. A. 1981 Vol. 24 P. 3245—3253.
132. Karney C. F. F., Fisch N. J.// Phys. Fluids 1985 Vol. 28 P. 116—126.
133. Cairns R. A., Owen J., Lashmore-Davies C. N.// Ibid. 1983. Vol. 26 P. 3475—3481.
134. Chiū S. C., Chan V. S., Hsu J. Y. e. a.// Nucl. Fus 1983. Vol. 23. P. 499—511.
135. Bhadra D. K., Chu C.// Phys. Rev. Lett. 1982 Vol. 48 P. 1824—1828.
136. Крашенинников С. И.// Физика плазмы 1983. Т. 9 С. 1201—1208
137. Vdovin V. L.// USSR Contribution to 15th Session of INTOR Workshop (Group C) on Phase 2A. Part 3 Vienna, 1987.
138. Okano K., Inoue B., Uchida T.// Nucl. Fus. 1985 Vol. 23 P. 235.
139. Grad H.// Phys. Fluids. 1963 Vol. 6 P. 147—181
140. Брагинский С. И.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М: Атомиздат, 1963 Вып 1. С 183—272
141. Hirshman S. P.// Phys Fluids 1980 Vol. 23 P. 1238—1243
142. Fisch N. J.// Ibid. 1986. Vol. 29. P. 172—179
143. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М: Наука, 1966.
144. Spitzer L., Harm R.// Phys. Rev. 1953. Vol. 59 P. 997—1015.
145. Fisch N. J.// Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. P. 172—179.
146. Karney C. F. F., Fisch N. J.// Ibid. 1986 Vol. 29. P. 180—192
147. Dreicer H.// Phys. Rev. 1960. Vol. 117. P. 329—342
148. Гуревич А. В.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1960 Т. 39 С. 1296—1307.
149. Jobs F. C., Bernabei S., Chu T. K. e. a.// Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 1295—1298.
150. Leuterer F., Soldner F., Eckhardt D. e. a.// Plasma Phys. and Contr. Fus. 1985. Vol. 27. P. 1399—1410

151. Takase Y., Knowlton S., Porkclab M.// Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. P. 1169—1176.
152. Alikeev V. V., Borschegovski A. A., Chistjakov V. V. e. a.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus Res. IAEA Vienna, 1987. Vol. 1. P 533—544.
153. Fisch N. J., Karney C. F. F.// Phys. Rev Lett. 1985. Vol 54. P. 897—900.
154. Karney C. F. F., Fisch N. J., Jobs F. C.// Phys. Rev. A, 1985. Vol. 32. P. 2554—2556.
155. Chan V. S., Liu C. S., Lee Y. C.// Phys. Fluids. 1986. Vol. 29 P. 1900—1907.
156. Maekawa T.// Phys Lett 1981. Vol. 85A P 1902—1905
157. Luckhardt S. C., Bers A., Fuchs V., Showcri M.// Phys Fluids 1977. Vol. 30. P 2110—2118.
158. Luckhardt S. C.// Nucl. Fus 1987. Vol. 27. P 1914—1918.
159. Tonon G., Moulin D.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA Vienna, 1985. Vol. 1. P. 557—566
160. Mikkelsen D. R., Singer C. E.// Nucl. Technol. Fus, 1983 Vol. 4. P 237—252.
161. Fujisawa N. INTOR Group// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA. Vienna, 1987. Vol 3 P. 231—245.
162. Valec E. J., Eder D. C.// Course and Workshop on Application of RF Waves to Tokamak Plasmas 1985 Vol. 2 P. 493—511.
163. Sugihara M., Fujisawa N., Yamamoto T. e. a.// Nucl. Eng and Design Fus. 1984. Vol. 1. P. 265—277
164. Heating in Toroidal Plasmas: Proceeding of the 4th Intem. Symp. Roma, 1984. Vol. 1, 2.
165. Abe T., Aikawa H., Akuoka N. e. a.// Plasma Phys. and Contr. Fus. 1987. Vol 29. P. 1377—1388
166. Шафранов В. Д.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леоновича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 3 С. 3—140
167. Бернштейн А., Фриденд Л.// Основы физики плазмы/ Под ред. Р. З. Сагдеева и М. Розенблюта М. Энергоатомиздат, 1983 Т 1. С 393—443.
168. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М Наука, 1980
169. Аликаев В. В., Днестровский Ю. Н., Параил В. В., Переверзев Г. В.// Физика плазмы 1977 Т 3. С 230—238
170. Litvak A. G., Permitin G. V., Suvorov E. V., Frajman A. A.// Nucl. Fus 1977. Vol. 17. P. 659—665
171. Голант В. Е.// Журн. эксперим и теорет. физ. 1971. Т 41. С 2495—2503.
172. Brambilla M., Cardinali A.// Plasma Phys. 1982 Vol. 24. P 1187—1200
173. Andrews P. L., Bhadra D. K.// Nucl. Fus 1986 Vol 26. P. 897—905
174. Елфимов А. Г., Киров А. Г., Сидоров В. П.// Высокочастотный нагрев плазмы. Горький: ИПФ АН СССР, 1983 С 211—252
175. Brambilla M.// Comp Phys Reports. 1986 Vol 4. P 71—93.
176. Knowlton S., Gormezano C., Moreau D. e. a.// 14th Europ. Conf. on Contr. Fus and Plasma Phys. Madrid, 1987 Vol 3 P 829—830.
177. Li Y. M., Mahajan S. M., Ross D. W.// Phys Fluids 1987 Vol. 30 P 2101—2109
178. Дмитриева М. В., Елфимов А. Г., Комошвили К. Г. и др. Препринт № 121. М., ИПМ АН СССР, 1984
179. Дмитриева М. В., Гришанов Н. И., Иванов А. А. и др. Препринт № 197. М., ИПМ АН СССР, 1986
180. Fukuyama A., Morishita T., Kishimoto Y. e. a.// Plasma Phys and Contr. Nucl Fus Res. IAEA Vienna, 1987. Vol I P 627—633
181. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы М Наука, 1982
182. Хоган Дж. Т.// Вычислительные методы в физике Управляемый термоядерный синтез М Мир 1974
183. Параил В. В., Переверзев Г. В.// Физика плазмы 1983. Т. 9 С. 585—593
184. Bernabei S., Daughney C., Efthimion P. e. a.// Phys Rev Lett 1982 Vol 49 P 1255—1258
185. Аликаев В. В., Гвоздков Ю. В., Дятлов И. и др.// Физика плазмы 1985. Т II С 53—67
186. Bonoli P. T., Englade R. C.// Phys Fluids. 1986 Vol. 29. P. 2937—2950

187. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967.
188. Shuss J. J.// Phys. Fluids, 1985 Vol. 28. P. 1779—1782.
189. Neudachin S. V., Parail V. V., Pereverzev G. V., Shurygin R. V.// 12th Europ. Conf on Contr Fus. and Plasma Phys Budapest, 1985. Vol. 2. P. 212—215.
190. Переверзев Г. В.// Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 426—428.
191. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972
192. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
193. Деман Ж., Мист П.// Квазиоптика. Избранные доклады на международном симпозиуме М Мир. 1966 С. 189—209.
194. Bonoli P. T., Ott E.// Phys. Rev Lett. 1981 Vol 46. P. 424—427
195. Andrews P. L., Perkins F. W.// Phys. Fluids 1983. Vol. 26. P. 2537—2545.
196. Petrzilka V. A., Klima R., Pavlo P.// Czech J Phys. 1983. Vol B33 P. 1002—1010.
197. Canobbio E., Crocci R.// Plasma Phys. and Contr Nucl Fus Res. IAEA. Vienna, 1985. Vol 1. P. 567—577.
198. Succi S., Appert K., Vaclavik J. e. a.// Ibid. P. 549—555.
199. Dnestrovskij Yu. N., Krasheninnikov S. I., Parail V. V., Pereverzev G. V.// Ibid. 1983. Vol. 1 P. 189—198
200. Dnestrovskij Yu. N., Pereverzev G. V.// Nucl Fus 1983 Vol 23 P. 633—648.
201. JET-2 Group presented by Suzuki N.// 10th Europ. Conf on Control Fusion and Plasma Phys. Moscow, 1981. Vol 2 P. 87—89.
202. Sidorov V. P., Nekrasov F. M., Komoshvili K. G. e. a.// Nucl. Fus. 1987. Vol. 27 P. 1411—1420
203. Thonemann P. C., Cowhig W. T., Davenport D. P.// Nature 1952. Vol 5. P. 34—38
204. Sakato K. and JET-80 Team// 14th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys Madrid, 1987. Vol 3 P. 894—897
205. Stevens J. E., Bernabei S., Bitter M. e. a.// Heating in Toroidal Plasmas 3rd Joint Varenna — Grenoble Intern Symposium Grenoble, 1982 Vol 2. P. 455—468.
206. Knowlton S., McDermott S., Porkolab M. e. a.// Ibid Vol 2. P. 232—235
207. Gormezano C., Hoang G. T., Agarici G. e. a.// 13th Europ. Conf on Contr Fus. and Plasma Phys. Schliersee, 1986 Vol 2 P. 311—314
208. Leuterer F., Eckhardt D., Soeldner F. e. a.// 12th Europ. Conf on Contr Fus. and Plasma Phys Budapest, 1985 Vol 2 P. 240—243.
209. Alikeev V. V., Väövin V. L., Ivanov D. P. e. a.// Proc of the IAEA Technical Commite Meeting Culham, 1983. Vol. 11 P. 313—326.
210. Yamamoto T., Hoshino K., Uesugi Y. e. a.// 13th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys Schliersee, 1986 Vol 2. P. 437—440.
211. Start D. F. H., Collins P. R., Jones E. M. e. a.// Phys. Rev. Lett. 1978. Vol 40. P. 1497—1500
212. Clark W. H. M., Corder J. G., Cox M. e. a.// Phys Rev Lett 1980 Vol 45. P. 1101—1104
213. Hamnen H., Challis C., Cordey J. G. e. a.// 14th Europ. Conf on Contr Fus. and Plasma Phys. Madrid, 1987 Vol 3 P. 1026—1029
214. Kirov A. G., Ruchko L. K., Astapenko G. I. e. a.// Ibid Vol 3 P. 992—995.
215. Sawley M., Ballico M., Brennan M. H. e. a.// Ibid Vol 3 P. 865—868.
216. Robinson D. C., Cox M., Edlington T. e. a.// Ibid. Vol 3 P. 814—817
217. Alikeev V. V., Borshchegovskij A. A., Chist'akov V. V. e. a.// Plasma Phys and Contr. Nucl. Fus Res IAEA Vienna 1987. Vol 1. P. 533—544
218. Uesugi Y., Yamamoto T., Hoshino K. e. a.// 14th Europ. Conf on Contr Fus. and Plasma Phys Madrid, 1985. Vol 3 P. 942—945
219. Eckhardt D., Toi K., Hamada Y. e. a.// Ibid Vol 3 P. 919—922
220. Tanaka S., Terumichi Y., Maekawa T. e. a.// Plasma Phys. and Contr Nucl Fus Res IAEA Vienna, 1983. Vol 1 P. 199—207.
221. Porkolab M., Shuss J. J., Takase Y. e. a.// Ibid. Vol. 1 P. 227—238

- 222 **Hooke W., Bernabei S., Boyd D. e. a.**// Ibid. Vol. 1. P. 239—246.
223. **Parlange F., Agarici G., Blanc P. e. a.**// 12th Europ. Conf. on Contr. Fus and Plasma Phys. Budapest, 1985 Vol. 2. P. 172—175.
224. **McCormik K., Soeldner F. X., Leuterer F. e. a.**// 13th Europ Conf on Contr. Fus and Plasma Phys Madrid, 1987 Vol 3 P. 894—897
225. **Gormezano C.**// Plasma Phys and Contr. Fus. 1986. Vol. 28. P 1365—1376.
226. **Motley R., Bell R., Bernabei S. e. a.**// Plasma Phys and Control Nucl. Fus. Res. IAEA. Vienna, 1985 Vol. 1. P 473—479.
227. **Leuterer F., Soeldner F., Bernhardt K. e. a.**// Ibid. Vol. 1 P 597—604
228. **Hoshino K., Yamamoto T., Suzuki N. e. a.**// 12th Europ. Conf on Contr Fus. and Plasma Phys Budapest, 1985. Vol. 2 P. 184—187.
- 229 **Tanaka S., Terumichi Y., Maekawa T. e. a.**// Plasma Phys. and Contr Nucl. Fus. Res IAEA Vienna, 1985. Vol 1. P. 623—631.
- 230 **McCormik K. e. a.**// Phys Rev. Lett. 1987. Vol 58. P. 491—494.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ СПЛОШНЫХ СРЕД

А. В. Тимофеев

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам теории колебаний и устойчивости сплошных сред (плазма, жидкость, гравитирующая среда) посвящено много работ. В большинстве из них затрагивается, а в некоторых и детально рассматривается случай, когда сплошная среда движется со скоростью, переменной в пространстве (см., например, [1—11]). Настоящая работа отличается тем, что в ней последовательно проводится точка зрения, согласно которой изменение амплитуды возмущений в неоднородно движущейся среде (рост или затухание) обуславливается резонансным взаимодействием с движением среды.

Понятие о резонансе между колебаниями сплошной среды и движением ее частиц ведет начало с теории взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, поскольку каждый акт излучения и поглощения может рассматриваться как результат резонансного взаимодействия с заряженными частицами. Подобные процессы особенно характерны для плазмы. Эта ее особенность обусловлена дальнедействующим характером кулоновских сил. Согласно А. А. Власову [12], для того, чтобы плазма из совокупности заряженных частиц превратилась в сплошную среду (появились коллективные степени свободы — самосогласованные колебания), не требуется прямых столкновений между заряженными частицами. Полезно, следуя [13], сопоставить плазму с обычным газом. При низкой плотности газ составляет собрание невзаимодействующих молекул (киндсеповский газ), поэтому у него отсутствуют коллективные степени свободы — звуковые волны. С повышением плотности на динамику газа все большее воздействие оказывают столкновения между молекулами, что ведет к появлению коллективных степеней свободы. Однако при этом индивидуальные степени свободы заканчивают независимое существование. В плазме же и те и другие степени свободы существуют одновременно [14]. Эффективный обмен энергией между коллективными степенями свободы (самосогласованные колебания) и движением отдельных заряженных частиц осуществляется при условии постоянства фазы колебаний на траектории частицы (фазовый резонанс), поэтому такое взаимодействие принято называть резонансным.

Если плазма однородна и внешнее магнитное поле отсутствует, то колебания плазмы имеют вид плоских волн $\sim \exp(-i\omega t + ikr)$, а заряженные частицы движутся равномерно и прямолинейно. В этом случае в резонанс с колебаниями попадают частицы, для которых выполняется черенковское резонансное условие $\omega = kv$. При наличии внешнего магнитного поля черенковский резонанс трансформируется в так называемый циклотронный $\omega = n\omega_j + k_{\parallel} v_{\parallel}$, где n — произвольное целое число; ω_j — циклотронная частота частиц сорта j ($j = e, i$); значок «параллельно» отмечает направление вдоль внешнего магнитного поля (см., например, [13]).

Влияние резонансного взаимодействия на эволюцию плазменных колебаний было впервые рассмотрено Л. Д. Ландау [15]. Им было показано, что простейшие электронные ленгмюровские колебания затухают в термодинамически равновесной плазме (затухание Ландау), отдавая энергию резонансным электронам, т. е. электронам, для которых выполняется условие черенковского резонанса. В настоящее время учет резонансного взаимодействия является обязательным элементом анализа колебаний разреженной бесстолкновительной плазмы. В большом числе работ было рассмотрено влияние резонансного взаимодействия на многочисленные ветви колебаний как в равновесной, так и в неравновесной плазме. В последнем случае резонансное взаимодействие может вызывать раскачку колебаний.

В типичной идеализированной задаче подобного сорта предполагается, что бесконечная однородная плазма как целое покоится или движется со скоростью, малой по сравнению с фазовой скоростью колебаний. При этом в резонанс с колебаниями попадает небольшая доля быстрых частиц из всего распределения по скоростям, равномерно распределенных по пространству, и для выявления резонансных эффектов требуется кинстическое рассмотрение. Условно подобные резонансы могут быть названы кинстическими.

Однако понятие резонанса полезно и при рассмотрении колебаний быстродвижущейся среды, скорость которой меняется в пространстве [16, 17]. В этом случае распределение частиц по скоростям как бы развернуто в пространстве. Если скорость среды в некоторой точке совпадает с фазовой скоростью колебаний, то все резонансные частицы сконцентрированы в ее окрестности. Такие резонансы естественно назвать гидродинамическими.

В гл. 1 показано, что основные закономерности, определяющие устойчивость плоскопараллельных течений обычной жидкости, естественно переводятся на язык теории гидродинамических резонансов. Так, резонансное поглощение колебаний обуславливает устойчивость течений идеальной жидкости с профилем скорости без точек перегиба (теорема Рэля), а резонансное излучение приводит к рэлеевской неустойчивости при наличии точки перегиба. Неустойчивость паузейлевского течения, обусловленную вза-

костью, можно рассматривать как неустойчивость колебаний с отрицательной энергией, вызванную резонансным поглощением колебаний, и т. д. Аналогии с теорией резонансного взаимодействия могут быть использованы и при рассмотрении нелинейных эффектов в неоднородных течениях жидкости [18].

Язык теории резонансного взаимодействия особенно привлекателен тем, что он позволяет с единых позиций рассматривать колебания сплошных сред, которые на первый взгляд совершенно различны (обычная жидкость, плазма, системы гравитирующих тел). Это обстоятельство придает ему значительную эвристическую силу, что продемонстрировано в гл. 2, 3, где рассмотрены простейшие и наиболее изученные виды колебаний неоднородно движущейся плазмы (желобковые и электронные ленгмюровские). Более того, в некоторых случаях аналогии с колебаниями плоскопараллельных течений обычной жидкости полезны и при рассмотрении колебаний покоящейся плазмы. Так, в гл. 4 (см. также [19]) показано, что в соответствии с аналогом теоремы Рэлея в неоднородной плазме в магнитном поле отсутствует обширный класс незатухающих альфвеновских колебаний, а в случае неравновесной плазмы в ее приграничной области развивается неустойчивость, сходная с неустойчивостью пуазейлевского течения. Эволюция начальных альфвеновских возмущений также напоминает эволюцию возмущений в плоскопараллельных течениях обычной жидкости.

Представляется, что задачи, рассмотренные в настоящей работе, далеко не исчерпывают возможности излагаемого подхода, и он будет способствовать дальнейшему развитию теории колебаний и устойчивости неоднородных сплошных сред.

1. КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Теорема Рэлея

В 1880 г. Рэлея установил, что плоскопараллельные течения идеальной (невязкой) жидкости, профиль скорости которых не имеет точек перегиба, устойчивы (теорема Рэлея) [20]. Может показаться, что эта теорема имеет отношение к довольно узкому классу течений и поэтому ее значение не слишком велико. Такая точка зрения представляется неверной. По нашему мнению, все дальнейшее развитие теории устойчивости плоскопараллельных течений можно рассматривать как развитие теоремы Рэлея и выяснение вопросов, которые из нее вытекают.

Теорема Рэлея имеет дело с колебаниями идеальной жидкости. Результат теоремы справедлив для течений реальной жидкости при достаточно больших числах Рейнольдса, когда можно пренебречь влиянием вязкости. В этом приближении уравнение движения принимает вид

$$d\mathbf{V}/dt = -\nabla p/\rho, \quad (1.1)$$

где p — давление; ρ — плотность жидкости.

Если жидкость несжимаема, то скорость \mathbf{V} должна также удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Для двумерных движений (в плоскости xOy) последнее уравнение будет удовлетворено, если $\mathbf{V} = (\partial\psi/\partial y; -\partial\psi/\partial x)$, где ψ — функция тока.

Применяя к (1.1) операцию rot_z и выражая скорость через функцию тока, получаем

$$\frac{d}{dt} \Delta\psi = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) выражает закон сохранения ротора скорости в идеальной несжимаемой жидкости ($\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{z}^0 \Delta\psi$).

Линеаризуя (1.2) по малым возмущениям, приводим это уравнение к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0(x) \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta\psi_1 - \frac{d^2 V_0}{dx^2} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь предполагается, что на стационарное течение со скоростью, направленной на Oy и меняющейся по Ox , наложено малое возмущение, характеризуемое ψ_1 . Выбирая возмущение в виде $\psi_1(x, t) = \psi_1(x) \exp(-i\omega t +iky)$, окончательно получаем:

$$\psi_1'' - k^2\psi_1 + \frac{kV_0''}{\omega - kV_0} \psi_1 = 0. \quad (1.4)$$

Это уравнение иногда называют уравнением Рэлея.

Существует несколько вариантов доказательства теоремы Рэлея. Мы будем следовать [1]. Домножим (1.4) на ψ_1^* и вычтем из полученного результата комплексно сопряженное выражение

$$\frac{d}{dx} \left(\psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} \right) = 2i \frac{\operatorname{Im} \omega k V_0''}{|\omega - kV_0|^2} |\psi_1|^2. \quad (1.5)$$

Проинтегрируем теперь (1.5) от одной границы потока до другой:

$$W \Big|_{x_1}^{x_2} = k \operatorname{Im} \omega \int_{x_1}^{x_2} \frac{kV_0''}{|\omega - kV_0|^2} |\psi_1|^2 dx. \quad (1.6)$$

В (1.6) введена действительная величина $W = \frac{ik}{2} \left(\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} - \psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} \right)$.

Эта величина определяет так называемое напряжение Рейнольдса

$$\tilde{W}_T = \rho_0 W = -\rho_0 \operatorname{Re} (V_{x1} V_{y1}^*)$$

в колебаниях (см. ниже).

На твердых стенках, ограничивающих течение, нормальный компонент скорости $V_{1x} = ik\psi_1$ и вместе с ним и левая часть (1.6) обращаются в нуль. Однако при $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ правая часть этого уравнения может стать равной нулю, лишь если величина V_0'' меняет

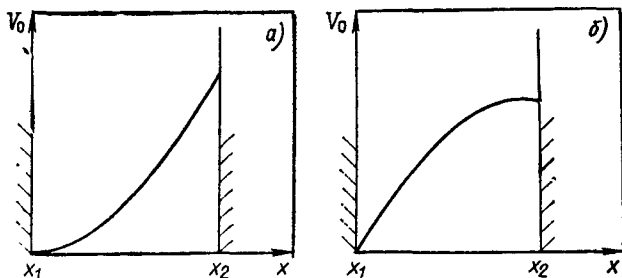


Рис. 1.1. Течения с профилями скорости без точек перегиба:

$a - V_0''(x) > 0$; $b - V_0''(x) < 0$; x_1, x_2 — границы течения

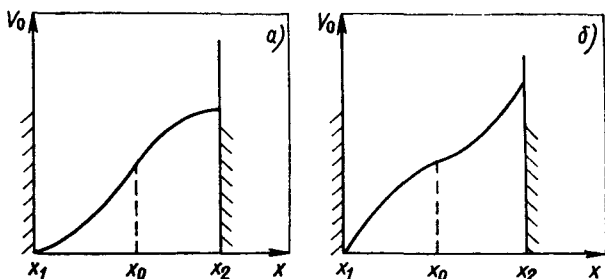


Рис. 1.2. Течения, профили скорости которых имеют точку перегиба:

$a - V_0'''(x_0) < 0$; $b - V_0'''(x_0) > 0$; x_0 — точка перегиба

знак в интервале (x_1, x_2) , т.е. профиль скорости течения имеет точку перегиба. Таким образом, наличие точек перегиба является необходимым условием неустойчивости. Если же профиль скорости не имеет точек перегиба, то течение устойчиво (теорема Рэлея). Примеры течений обоих типов изображены на рис. 1.1, 1.2.

Отметим, что на первый взгляд соотношение (1.6) в равной мере относится как к нарастающим ($\text{Im } \omega > 0$), так и к затухающим ($\text{Im } \omega < 0$) колебаниям. Поэтому на основании (1.6) следовало бы заключить, что если в рассматриваемых течениях какие-либо собственные колебания и возможны, то они должны быть нейтральными ($\text{Im } \omega = 0$). На самом деле (см. ниже) рассмотрение затухающих колебаний ($\text{Im } \omega < 0$) требует учета вязкости жидкости, как бы ни была она мала. Поэтому все выводы относительно колебаний с $\text{Im } \omega < 0$, сделанные на основе анализа уравнений идеальной жидкости, вообще говоря, неверны.

Пока же обратимся к нейтральным колебаниям. Следуя [1], введем новую функцию $\tilde{\psi}_1 = \psi_1 / (\omega - kV_0)$, для которой (1.4) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left((\omega - kV_0)^2 \frac{d\tilde{\psi}_1}{dx} \right) - k^2 (\omega - kV_0)^2 \tilde{\psi}_1 = 0. \quad (1.7)$$

Домножая (1.7) на $\tilde{\psi}_1^*$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} dx (\omega - kV_0)^2 \left(\left| \frac{d\tilde{\psi}_1}{dx} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}_1|^2 \right) = 0. \quad (1.8)$$

Соотношение (1.8) препятствует существованию нейтральных колебаний. Исключение составляет лишь случай, когда в какой-то точке x_S выполняется условие резонанса $\omega = kV_0(x_S)$. В этой точке $d\tilde{\psi}_1/dx \sim (\omega - kV_0)^{-2} \rightarrow \infty$, и соотношение (1.8) теряет смысл, так как интеграл в левой части (1.8) расходится. Если окажется, что $\psi_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_S} 0$ [$\tilde{\psi}_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_S} \text{const}$], то точку x_S можно взять в качестве

одного из пределов интегрирования в (1.8). При этом равенство (1.8) не будет удовлетворяться для новых интервалов интегрирования (x_1, x_S) или (x_S, x_2) .

Следует, однако, отметить, что равенство (1.8) выполняется в вырожденном случае $k \rightarrow 0$, $\omega/k \rightarrow 0$, $\tilde{\psi}_1 \rightarrow \text{const}$, при этом $\psi_1(x) \sim V_0(x)$. Поскольку функция $\psi_1(x)$ должна удовлетворять граничным условиям $\psi_1(x_1) = \psi_1(x_2) = 0$, такие колебания могут существовать лишь в течениях, невозмущенная скорость которых $V_0(x)$ обращается в нуль на стенках, как, например, в течении Пуазейля. Ниже покажем, что именно эти вырожденные колебания раскачиваются под действием вязкости. Оставляя их анализ на будущее, обратимся к нейтральным колебаниям общего типа с $k \neq 0$, $\omega/k \neq 0$.

Вычислим интеграл в правой части (1.6), считая, что в какой-то точке x_S выполнено условие резонанса, и рассматривая колебания с $\text{Im } \omega = 0$ как предельный случай колебаний с $\text{Im } \omega \neq 0$. Используя соотношение $\frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \pi \delta(x)$, получаем:

$$W|_{x_1}^{x_2} = \pi \text{sgn } \text{Im } \omega k V_0''(x_S) |V_0'(x_S)|^{-1} |\psi_1(x_S)|^2. \quad (1.9)$$

Из последнего соотношения следует, что нейтральные колебания, если их рассматривать как предел колебаний с $\text{Im } \omega \neq 0$, также не существуют в течениях с профилем скорости без точек перегиба.

1.2. Учет вязкости. Правило обхода Ландау

Равенство (1.5), которое является дифференциальным эквивалентом (1.6), показывает, что при $\text{Im } \omega = 0$ функция W постоянна на интервалах (x_1, x_S) , (x_S, x_2) и испытывает скачок в резонансной точке x_S . Отметим, что знак скачка зависит от того, считаются ли нейтральные колебания предельным случаем нарастающих ($\text{Im } \omega > 0$) или затухающих ($\text{Im } \omega < 0$) колебаний.

Для того чтобы устранить эту неоднозначность, обратимся непосредственно к дифференциальному уравнению (1.4). Мы показали, что для нейтральных собственных колебаний это уравнение

на интервале (x_1, x_2) должно иметь особенность, поскольку в резонансной точке x_S знаменатель последнего выражения обращается в нуль. Если предположить, что у частоты собственных колебаний появляется $\text{Im } \omega \neq 0$, то резонансная точка смещается с действительной оси в плоскость комплексного переменного x . Действительно, при $\text{Im } \omega \neq 0$ мнимую часть (1.8) можно представить в виде

$$\text{Im } \omega \int_{x_1}^{x_2} dx (\text{Re } \omega - kV_0(x)) \left(\left| \frac{d\tilde{\psi}_1}{dx} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}_1|^2 \right) = 0. \quad (1.10)$$

Из соотношения (1.10) следует, что если $\text{Im } \omega \neq 0$, то где-то на интервале (x_1, x_2) выполняется равенство $\text{Re } \omega = kV_0(x)$, и, следовательно, $x_1 < \text{Re } x_S < x_2$.

Продолжим уравнение (1.4) на плоскость комплексного переменного x . В окрестности резонансной точки x_S линейно независимые решения (1.4) представляются в следующем виде (см., например, [1]):

$$\psi_1^{(1)} = Q(\xi) + \xi \ln \xi \cdot P(\xi); \quad (1.11)$$

$$\psi_1^{(2)} = \xi P(\xi), \quad (1.12)$$

где $\xi = (x - x_S)/a$; $a = V_0'(x_S)/V_0''(x_S)$; $P(\xi)$, $Q(\xi)$ — полиномы от ξ , причем $P(0) = Q(0) = 1$.

Если особая точка x_S не совпадает ни с одной из граничных точек, а это, как мы видели, необходимо для существования собственных функций уравнения (1.4), то для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, в решение должна входить функция $\psi_1^{(1)}(x)$, имеющая в точке x_S логарифмическую особенность. Следовательно, особая точка является точкой вставки решения. Решение становится однозначным, если из точки x_S провести разрез по плоскости комплексного переменного.

Рассмотрим для определенности случай $kV_0'(x_S) > 0$. Из соотношения $V_0(x_S) = \omega/k$ следует, что при $\text{Im } \omega > 0$ особая точка смещается с действительной оси вверх, а при $\text{Im } \omega < 0$ — вниз. [При $kV_0'(x_S) < 0$ направление смещения противоположно.]

Если разрез проведен из особой точки вверх, то решение на действительной оси регулярно при $\text{Im } \omega > 0$, а при $\text{Im } \omega < 0$ имеет разрыв в точке пересечения разреза с действительной осью (рис. 1.3). Если разрез проведен вниз ($kV_0'(x_S) < 0$), то решения, соответствующие затухающим и нарастающим колебаниям, меняются местами.

Вопрос о направлении обхода особых точек, который в данном случае эквивалентен вопросу о положении разреза, встречается во всех задачах на собственные колебания сплошной среды, где колебания могут резонировать с ее движением. Помимо жидкости такими средами являются газ, плазма, совокупность гравитирующих тел (звезд) и т. д. Для колебаний термодинамически равновесной (покоящейся) плазмы Л. Д. Лапдау

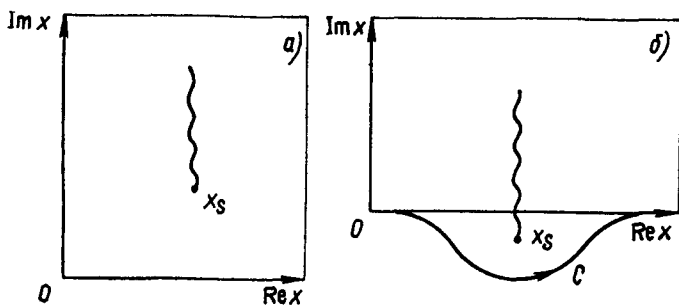


Рис. 1.3. Положение разреза на плоскости комплексного переменного x :
 $a - \text{Im } \omega > 0$; $b - \text{Im } \omega < 0$, x_s — резонансная точка; волнистая линия — разрез, $kV_0'(x_s) > 0$;
 C — контур, по которому следует обходить точку x_s в соответствии с правилом Ландау

было указано, что резонансную точку следует обходить таким образом, чтобы получающиеся выражения были аналитическими при $\text{Im } \omega > 0$ (правило обхода Ландау). Это правило получается автоматически, если задачу на собственные колебания рассматривать как часть более широкой задачи об эволюции начальных возмущений и решать эту последнюю методом преобразования Лапласа [15].

Если принять правило обхода Ландау, то уравнение (1.4) окажется справедливым лишь при $\text{Im } \omega > 0$. Для колебаний с $\text{Im } \omega < 0$ в его левой части должно появиться дополнительное слагаемое, учитывающее скачок величины W на разрезе. Соответствующим образом модифицированное уравнение (1.4), вообще говоря, может иметь собственные функции. Таким образом, в течениях идеальной жидкости с профилем скорости без точек перегиба невозможны лишь нарастающие колебания. Этот вывод и составляет содержание теоремы Рэлея [20]. Отметим, что хотя в [20] не рассматривается вопрос о знаке $\text{Im } \omega$ и перемена знака никак не сказалась бы на проводимом анализе, Рэлей говорит лишь о нарастающих колебаниях.

Отметим также, что в соответствии с правилом обхода Ландау случай $\text{Im } \omega = 0$ следует рассматривать как предел $\text{Im } \omega > 0$, поэтому в течениях с профилем скорости без точек перегиба должны отсутствовать и нейтральные колебания. Вопрос о колебаниях с $\text{Im } \omega < 0$ обсуждается в приложении П.1.

Иным путем к выбору знака $\text{Im } \omega$ в выражении (1.6) и всем последующим выводам пришел Линь [1]. Во всех физических задачах наличие особенности свидетельствует о недостаточности исходных уравнений и необходимости включения в рассмотрение дополнительных факторов, устраняющих особенность. В рассматриваемой задаче таким дополнительным фактором является вязкость жидкости. Действительно, при приближении к особой точке высшие производные одного из двух линейно независимых решений (1.11) неограниченно возрастают $\left[\frac{d^n}{dx^n} \psi_1^{(1)} \sim \right.$

$\sim (x - x_s)^{1-n}$], поэтому на достаточно малых расстояниях от x_s вязкость жидкости становится существенной, как бы ни была она мала. Для ее учета дополним правую часть уравнения движения (1.1) слагаемым $\nu \Delta V$, где ν — кинематический коэффициент вязкости. Действуя затем так же, как при выводе (1.4), приходим к уравнению Орра — Зоммерфельда:

$$-i\nu \Delta^2 \psi_1 + (\omega - kV_0) \Delta \psi_1 + kV_0'' \psi_1 = 0. \quad (1.13)$$

Представляя величину $\omega - kV_0$ в виде $-kV_0'(x_s)(x - x_s)$, а также учитывая приведенную выше оценку производных $\frac{d^n}{dx^n} \psi_1^{(1)} \sim (x - x_s)^{1-n}$, находим, что для сингулярного решения $\psi_1^{(1)}$ «вязкое» слагаемое в (1.13) необходимо учитывать на расстоянии порядка $\delta x_s \sim (\nu/kV_0')^{1/3}$ от резонансной точки x_s .

Полная система решений уравнения (1.13), аналитических во всей плоскости комплексного переменного, была построена Вазовым [21] (см. приложение П.2). Он, в частности, нашел, что вне вязкой области радиусом δx_s , окружающей точку x_s , четыре линейно независимых решения уравнения (1.13) разделяются на две группы: крупно- и мелкомасштабные. Два крупномасштабных решения вне вязкой области могут быть приближенно описаны уравнением Рэлея (1.4). Мелкомасштабные решения остаются «вязкими» как угодно далеко от x_s . Существенно, что в определенном секторе комплексного переменного, выходящем из особой точки $[\pi/6 < \arg(kV_0'(x_s)(x - x_s)) < 5\pi/6]$, крупномасштабное решение, имеющее логарифмическую особенность $-\psi_1^{(1)}$, завязывается с мелкомасштабными (рис. 1.4). Вспомним теперь, что, используя правило обхода Ландау, мы проводили разрез именно в этом секторе. Образно выражаясь, можно сказать, что на разрезе, где функция $\psi_1^{(1)}$ имеет разрыв, в игру вступает вязкость жидкости. Под действием вязкости разрыв размывается, в результате решение становится непрерывным во всей плоскости комплексного переменного x . В то же время если мы не

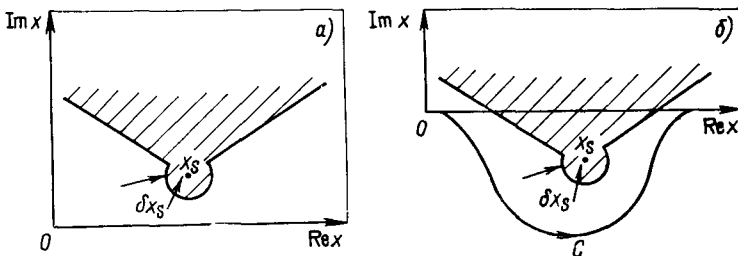


Рис. 1.4. Плоскость комплексного переменного для уравнения Орра — Зоммерфельда (1.13).

$a - \text{Im} \omega > 0$, $b - \text{Im} \omega < 0$, $\delta x_s \approx (\nu/kV_0')^{1/3}$; область, в которой медленноменяющееся (невязкое) решение завязывается с быстроменяющимися (вязким), заштрихована, C — контур, по которому следует обходить точку x_s в соответствии с правилом Ландау

интересуемся ходом решения в «вязкой области», то для крупномасштабных решений $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$ можно использовать уравнение колебаний идеальной жидкости, дополненное правилом обхода особой точки по Ландау. Этот упрощенный подход возможен в силу того, что «вязкий» сектор $\pi/6 < \arg(x-x_S) < 5\pi/6$ при $kV_0'(x_S) > 0$ и $7\pi/6 < \arg(x-x_S) < 11\pi/6$ при $kV_0'(x_S) < 0$ не захватывает действительную ось $[\arg(x-x_S) = 0, \pi]^*$.

При продолжении через точку x_S регулярного решения $\psi_1^{(2)}$ его вид останется прежним — оно не «чувствует» резонанса. В сингулярном же решении — $\psi_1^{(1)}$ изменяется аргумент логарифма. Например, если $kV_0'(x_S) > 0$, $kV_0''(x_S) > 0$ и решение продолжается справа, аргумент величины $\xi = (x - x_S)V_0''(x_S)/(V_0'(x_S))$ получает приращение $-\pi$ (см. рис. 1.3, 1.4). В результате при $x < x_S \ln \xi$ в (1.11) определяется как $\ln|\xi| - i\pi$. Отсюда следует, что при прохождении точки x_S производная $d\psi_1^{(1)}/dx$ испытывает скачок:

$$\left. \frac{d\psi_1^{(1)}}{dx} \right|_{x_S^{-\varepsilon}}^{x_S^{+\varepsilon}} = i\pi. \quad (1.14)$$

Здесь учтено, что $P(0) = 1$ (см. выше). Тот же самый результат можно получить из (1.5), если резонансный знаменатель определить как $P/(\omega - kV_0) - i\pi\delta(\omega - kV_0)$ и учесть, что $Q(0) = 1$. По существу именно такое определение использовалось выше, когда нейтральные колебания рассматривались как предел нарастающих при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$. Естественно, что полученное при этом значение скачка W [см. (1.9)] вполне согласуется с (1.14).

Если рассматривать уравнение Рэля само по себе, а не как предел уравнения Орра — Зоммерфельда при исчезающей вязкости, то допустимо определение резонансного знаменателя $P/(\omega - kV_0) + C\delta(\omega - kV_0)$, где C — произвольная постоянная. Иногда так и поступают с уравнениями типа (1.4) (см., например, [22, 23]). В интересующем нас случае такое определение резонансного знаменателя может быть оправдано при рассмотрении колебаний достаточно большой амплитуды, в которых смещение жидкости превышает размер резонансной зоны δx_S , см. п. 1.6.3. Однако при рассмотрении малых колебаний, описываемых линейным приближением, уравнение (1.4) следует регуляри-

* Во всех задачах о колебаниях сплошных сред аналитическое продолжение на плоскость комплексного переменного (пространственная координата в задачах о колебаниях неоднородных течений, частота в задачах о колебаниях плазмы и т. д.) приводит к сходным результатам. А именно если в одной из полуплоскостей комплексного переменного можно пользоваться упрощенным уравнением, не учитывающим мелкомасштабные эффекты, существенные в окрестности резонансной точки (правило обхода Ландау), то в другой полуплоскости имеется сектор, в котором эти эффекты необходимо учитывать при произвольном удалении от резонансной точки. Его размер может отличаться от размера «вязкого» сектора. Например, классическую задачу об электронных ленгмюровских колебаниях необходимо рассматривать кинетически даже при $|\omega| \gg kv_{Te}$, если $-\pi/4 > \arg \omega > -3\pi/4$ (см. [45], а также гл. 3). Здесь k — волновой вектор колебаний, v_{Te} — тепловая скорость электронов.

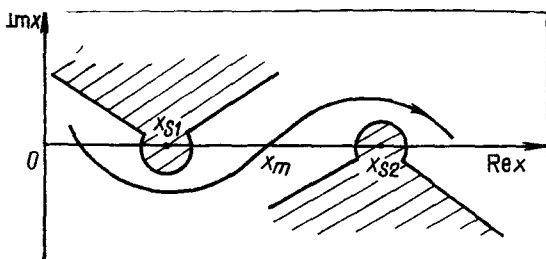


Рис. 1.5. Контур обхода особых точек уравнения (1.4) в случае профиля скорости, имеющего максимум в точке x_m , $\omega < kV_0(x_m)$

зывать учетом вязкости, что приводит к вполне определенному значению $C = -i\pi$.

В заключение укажем одно ограничение теоремы Рэлея, связанное с использованием при ее доказательстве правила обхода Ландау. Это правило пригодно лишь для анализа колебаний течений с монотонным профилем скорости. Действительно, при $kV_0'(x_s) > 0$ по Ландау резонансная точка должна обходиться в плоскости комплексного переменного снизу и при $kV_0'(x_s) < 0$ сверху. Соответствующий контур в случае профиля скорости, имеющего максимум в точке x_m , изображен на рис. 1.5. Если $\omega \rightarrow kV_0(x_m)$, то расстояние между резонансными точками, в конце концов, станет настолько малым, что вязкие слои, окружающие их, перекроются. В этом случае использование упрощенного уравнения (1.4), дополненного правилом обхода Ландау, станет невозможным. Таким образом, в течениях с немонотонным профилем скорости, вообще говоря, нельзя исключить существования неустойчивых колебаний с небольшим инкрементом и $\omega \approx kV_0(x_m)$ (x_m — точка экстремума скорости). Следует, однако, отметить, что, например, в случае пуазейлевского течения численный анализ таких колебаний не обнаружил.

1.3. Уравнение Рэлея как уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом

Согласно теореме Рэлея, в течениях идеальной жидкости с профилем скорости без точек перегиба отсутствуют нарастающие и нейтральные колебания, а также некоторый класс затухающих колебаний. Чтобы выяснить, почему для уравнения Рэлея, описывающего колебания таких течений, характерно отсутствие собственных функций, будем рассматривать это уравнение как квантовомеханическое уравнение Шредингера. В уравнении Рэлея величина $-k^2$ играет роль энергии, а $-kV_0''(x)/(\omega - kV_0(x))$ — потенциала (см. рис. 1.6 и [16, 17]). Процессы, приводящие к устранению собственных колебаний, разыгрываются в окрестности резонансной точки, где $U(x) \approx A/(x - x_s)$. Их физическую сущность легче всего выявить на примере колебаний,

характерный пространственный масштаб которых по $0x$ мал по сравнению с характерным масштабом изменения начальной скорости $V_0(x)$. При анализе таких колебаний можно использовать квазиклассическое приближение, записав $\psi_1(r, t)$ в виде

$$\psi_1(x, y, t) \approx k_x^{-1/2} \exp\left(-i\omega t +iky + i \int^x d\lambda k_x\right).$$

На самом деле, пространственные масштабы начальной и возмущенной скоростей одинаковы. Поэтому, строго говоря, использование квазиклассического приближения незаконно. Однако нашей целью является физическая интерпретация результатов, полученных в предыдущих разделах, что достигается наиболее просто на «квазиклассическом языке» волн и волновых пакетов, составленных из таких волн. Потому рассмотрим модельную задачу, считая значение $A = V_0''(x_S)/V_0'(x_S)$ в приближенном выражении для потенциала $U(x) = A/(x - x_S)$ достаточно большим ($A \gg \max(a^{-1}, k^2 a)$). Здесь a — характерный пространственный масштаб невозмущенной скорости $V_0(x)$. Это позволит при анализе модельного уравнения

$$\psi_1'' - k^2 \psi_1 - \frac{A}{(x - x_S)} \psi_1 = 0 \quad (1.15)$$

в окрестности точки x_S использовать квазиклассическое приближение. В области, где $|A/(x - x_S)| \gg k^2$, квазиклассическое волновое число по $0x$ равно $k_x \approx \pm (A/(x_S - x))^{1/2}$, и соответственно решения (1.15) имеют вид

$$\psi_1(x) \approx (x_S - x)^{1/4} \exp\{\pm 2iA^{1/2}(x_S - x)^{1/2}\}. \quad (1.16)$$

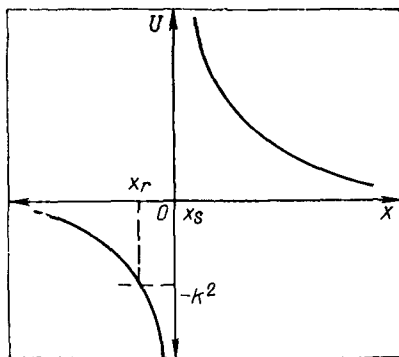
Для определенности считается $A > 0$.

В точке резонанса x_S , где фазовая скорость колебаний по Oy совпадает со скоростью течения $[\omega/k = V_0(x_S)]$, эффективный потенциал $U(x)$ обращается в бесконечность, и эта точка является сингулярной точкой поворота (рис. 1.6)*. Рассмотрим нейтральные колебания, когда точка x_S лежит на действительной оси, поскольку при действительных значениях переменного x физический смысл решения усматривается значительно проще.

Найдем формулы «сшивки» для квазиклассических решений, заданных по разные стороны от сингулярной точки поворота x_S . Из (1.16), см. также § 1.2, следует, что точка x_S является точкой

* Такую же особенность имеет кулоновский потенциал в месте нахождения точечного заряда. Однако в задаче о движении заряженной частицы в таком потенциале одно из граничных условий для ψ -функции частицы ставится в особой точке. Этому граничному условию удовлетворяет регулярное решение волнового уравнения [см. (1.12)]. Поэтому второе линейно независимое сингулярное решение отбрасывается. В настоящем случае особенность попадает внутрь рассматриваемого интервала, и, чтобы удовлетворить граничным условиям на его обоих концах, следует оставить как регулярное, так и сингулярное решения.

Рис. 1.6. Уравнение Рэлея как квантовомеханическое уравнение Шредингера:
 $U(x) = -kV_0''(x)/(\omega - kV_0'(x))$ — эквивалентный потенциал, $E = -k^2$ — энергия; x_S — сингулярная точка поворота, x_r — обычная точка поворота



ветвления решения. Рассмотрим решение, убывающее при $x > x_S$, т. е. в области непрозрачности:

$$\psi_1 \approx (x_S - x)^{1/4} \exp\{-2A^{1/2}(x - x_S)^{1/2}\}. \quad (1.17)$$

Если при аналитическом продолжении этого решения в область свободного распространения колебаний ($x < x_S$) точку x_S обходить в комплексной плоскости сверху, то $\arg(x - x_S)$ получит приращение π и рассматриваемое решение перейдет в волну, бегущую налево:

$$\psi_1 \approx (x_S - x)^{1/4} \exp\{-2iA^{1/2}(x_S - x)^{1/2}\}. \quad (1.18)$$

При обходе точки x_S снизу $\arg(x - x_S)$ получает приращение $-\pi$, и то же самое решение переходит в волну, бегущую направо:

$$\psi_1 \approx (x_S - x)^{1/4} \exp\{2iA^{1/2}(x_S - x)^{1/2}\}. \quad (1.19)$$

Анализ, проведенный в § 1.2, показал, что при продолжении решения через точку x_S следует использовать правило обхода Ландау. В соответствии с этим правилом резонансную точку x_S следует обходить снизу при $kV_0'(x_S) > 0$ и сверху при $kV_0'(x_S) < 0$. В результате решение, убывающее справа от x_S (область непрозрачности), при $kV_0'(x_S) > 0$ в области слева от x_S переходит в волну, бегущую налево, а при $kV_0'(x_S) < 0$ — в волну, бегущую направо*:

$$\begin{aligned} (x_S - x)^{1/4} \exp\{-\operatorname{sgn}[kV_0'(x_S)] 2i A^{1/2}(x_S - x)^{1/2}\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (x_S - x)^{1/4} \exp\{-2A^{1/2}(x - x_S)^{1/2}\}. &\quad (1.20) \end{aligned}$$

Напомним, что временная зависимость возмущений взята в виде $\exp(-i\omega t)$.

Рассмотрим теперь физические результаты, к которым приводит использование (1.20). С этой целью получим выражение для скорости распространения волнового пакета, составленного

* Квазиклассика дает асимптотическое представление точного решения. Это представление заведомо не меняется (явление Стокса отсутствует), если при обходе точки x_S не пересекается линия Стокса (линия мнимой фазы). В § 1.4 будет показано, что в данном случае это условие выполняется.

из квазиклассических возмущений. Эта величина, как известно, определяет скорость переноса энергии колебаниями. В квазиклассическом приближении из (1.4) находим следующее выражение для частоты колебаний:

$$\omega = kV_0(x) + kV_0''(x)/(k_x^2 + k^2), \quad (1.21)$$

откуда для групповой скорости получаем:

$$d\omega/dk_x = -2k_x k V_0''/(k_x^2 + k^2)^2. \quad (1.22)$$

Поблизости от резонансной точки x_S , где $k_x \gg k$, имеем

$$k_x \approx \pm \left(\frac{kV_0''}{\omega - kV_0} \right)^{1/2} \approx \pm \left(\frac{A}{|x - x_S|} \right)^{1/2}. \quad (1.23)$$

Это выражение было использовано при получении (1.16) [фаза экспоненты в (1.16) равна $\Phi(x) = \int_{x_S}^x k_x(\lambda) d\lambda$]. Соотношение

(1.20) позволяет определить знак k_x , а с ним и знак $d\omega/dk_x$ для возмущений, локализованных в течении (убывающих справа от x_S). Для таких возмущений

$$d\omega/dk_x = 2 \operatorname{sgn}(kV_0'(x_S)) kV_0''(x) |x - x_S|^{3/2} A^{-3/2}. \quad (1.24)$$

Теперь следует вспомнить, что (1.23) было получено для случая $A = V_0''(x_S)/V_0'(x_S) > 0$. Поэтому групповая скорость положительна при обоих знаках величины $kV_0(x_S)$, и, следовательно, энергия может переноситься только по направлению к резонансной точке. Из (1.24) следует, что по мере приближения к x_S скорость волнового пакета падает. Так как слева от точки x_S имеется только одна волна [см. (1.20)], то отражение от этой точки отсутствует. Поэтому энергия возмущения накапливается в окрестности резонансной точки, и, как бы ни была мала вязкость жидкости, через достаточно большой промежуток времени накопленная энергия диссипируется. Отсюда следует, что квазиклассические собственные колебания с $\operatorname{Im} \omega = 0$ отсутствуют.

К этому выводу можно прийти и иным путем.

Выясним, можно ли построить квазиклассические собственные решения уравнений (1.4), (1.15). Такие решения, если они существуют, локализуются в потенциальной яме между точками поворота x_S и x_r (см. рис. 1.6). Известно, что решение, убывающее за обычной точкой поворота, в которой $k_x(x_i) = 0$, в области прозрачности переходит в стоячую волну. Это правило сопряжения согласуется с законом сохранения волновой энергии при отражении от обычной точки поворота. Действительно, стоячая волна может быть представлена как сумма падающей и отраженной волн с равными амплитудами. В то же время из-за поглощения энергии колебаний в сингулярной точке поворота решение, спадающее за ней, переходит в бегущую волну [см. (1.20)]. Поэтому сшивка решений, убывающих за точками x_r и x_S , очевидным образом невозможна, и, следовательно, уравнения

(1.4), (1.15) не имеют квазиклассических собственных функций. Колебания с $\text{Im } \omega \neq 0$, для которых $\text{Im } x_s \neq 0$, следует рассматривать, основываясь на общих правилах построения квазиклассических решений в комплексной плоскости (см., например, [24, 25]). При этом доказательство отсутствия собственных функций с $\text{Im } \omega > 0$ практически не отличается от вышеизложенного. Что касается затухающих колебаний с $\text{Im } \omega < 0$, то их, строго говоря, нельзя рассматривать с помощью уравнений (1.4), (1.15) (см., однако, приложение П.1).

Таким образом, анализ модельного примера коротковолновых квазиклассических колебаний ясно показывает, что отсутствие незатухающих собственных колебаний в течениях идеальной жидкости с профилем скорости без точек перегиба (теорема Рэлея) обусловлено поглощением в резонансных точках.

В заключение сделаем два замечания.

1. Нелинейные эффекты должны оказывать особенно сильное воздействие на течение в окрестности резонансной точки x_s (см. § 1.6). Не исключено, что в некоторых случаях их можно будет учесть, всего лишь изменив правило обхода точки x_s . Легко видеть, что, например, при обходе резонансной точки по «анти-Ландау» сверху при $kV_0'(x_s) > 0$ и снизу при $kV_0'(x_s) < 0$ получим не поглощение, а излучение колебаний резонансной точкой.

Собственные колебания в рассматриваемых течениях станут возможными, если правило продолжения решения через точку x_s будет состоять в суммировании результатов обхода точки x_s с разных сторон. В этом случае в области прозрачности перед сингулярной точкой поворота, как и перед обычной точкой поворота, будут падающая и отраженная волны с равными амплитудами.

2. Решения модельного уравнения (1.15) могут быть выражены через вырожденные гипергеометрические функции (см., например, [26]):

$$\psi_1^{(1)} = (x - x_s) \exp\{-k(x - x_s)\} \Psi(1 + (A/2k), 2; 2k(x - x_s)).$$

$$\psi_1^{(2)} = (x - x_s) \exp\{-k(x - x_s)\} \Phi(1 + (A/2k), 2; 2k(x - x_s)).$$

Использование этих представлений позволяет сразу связать квазиклассические асимптотики решений в областях $x \rightarrow \pm \infty$, т. е. в обеих областях непрозрачности (см. рис. 1.6). Разумеется, и при таком методе анализа уравнения (1.15), дополненного правилом обхода Ландау, также приходим к выводу об отсутствии у этого уравнения собственных функций*.

* Распространение электромагнитных колебаний в плазме, находящейся в неоднородном магнитном поле, описывается уравнением типа (1.15), отличающимся знаком перед вторым членом (см. [13]). Анализ решений этого уравнения, выраженных через вырожденные гипергеометрические функции, также привел к выводу о безотражательном поглощении колебаний в особой точке (в данном случае точке циклотронного резонанса, в которой частота электромагнитных колебаний совпадает с циклотронной частотой электронов или ионов [13, 27, 28]).

1.4. Аналог теоремы Рэлея для сингулярных уравнений с полюсом произвольного порядка

Выше было установлено, что для сингулярных уравнений определенного вида с полюсом первого порядка характерно отсутствие собственных функций, соответствующих незатухающим колебаниям (теорема Рэлея). В [16, 29] показано, что в коротковолновом пределе этим свойством обладают некоторые сингулярные уравнения с полюсом произвольного порядка. В [16, 29] рассматривалось уравнение

$$\psi_1'' - \tilde{k}^2 \psi_1 + U(x) \psi_1 = 0, \quad (1.25)$$

где $U(x) = A(x)/(x - x_s)^n$; $A(x)$ — плавная функция; $|U(x)| \rightarrow 0$ при $|x - x_s| \rightarrow \infty$; $\tilde{k} = (k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$.

Уравнения вида (1.25) встречаются, например, в задачах об устойчивости колебаний неоднородно движущейся плазмы (см. ниже). В этом случае особая точка x_s определяется равенством $\omega = kV_0(x)$, где $V_0(x)$ — скорость плазмы. Как и рассматривавшееся выше сингулярное уравнение (1.4), уравнение (1.25) следует дополнить правилом обхода Ландау, учитывающим тот факт, что уравнение (1.25) несправедливо в одной из полуплоскостей $\text{Im}(x - x_s) > 0$ [при $kV_0'(x_s) > 0$] или $\text{Im}(x - x_s) < 0$ [при $kV_0'(x_s) < 0$]. Профиль скорости предполагается монотонным, и поэтому положение контура обхода по отношению к особой точке остается неизменным при произвольных значениях ω . На рис. 1.7 правило обхода учтено разрезом плоскости комплексного переменного, проведенным для определенности вниз ($kV_0'(x) < 0$). Рис. 1.7 показывает, что на достаточно больших расстояниях от точки x_s поведение решений (1.25) не зависит от вида $U(x)$. Однако внутри области S зависимость решений от вида $U(x)$ становится существенной, см., например, рис. 1.8.

Не останавливаясь на деталях рассмотрения [16, 29], отметим его основной момент. Оно основывалось на том обстоятельстве, что на достаточном удалении от точки x_s уравнение (1.25) принимает вид

$$\psi_1'' - \tilde{k}^2 \psi_1 = 0. \quad (1.26)$$

Последнее уравнение заведомо не имеет собственных функций. Очевидно, что не будет иметь собственных функций и исходное уравнение (1.25), если можно перейти от одной граничной точки до другой, не выходя за границы применимости упрощенного уравнения (1.26). Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $\text{Im} \omega > 0$, резонансная точка была расположена достаточно далеко от граничных $x_{1,2}$, а волновое число \tilde{k} было достаточно велико: $|U(x_{1,2})| \ll \tilde{k}^2$. Иными словами, в неоднородных течениях плазмы с монотонным профилем скорости должны отсутствовать коротковолновые нарастающие колебания, локализованные во внутренней области течения. Отметим, что при уве-

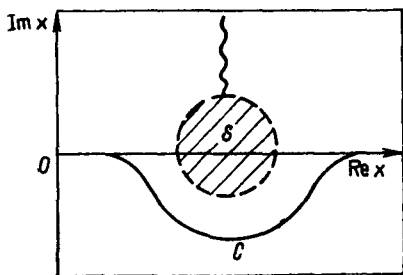


Рис. 1.7. Плоскость комплексного переменного x для уравнения (1.25) в заштрихованной области S неприменно упрощенное уравнение (1.26); волнистая линия — разрез; C — контур, по которому следует обходить область S в соответствии с правилом Ландау; считается, что $kV_0'(x_s) < 0$

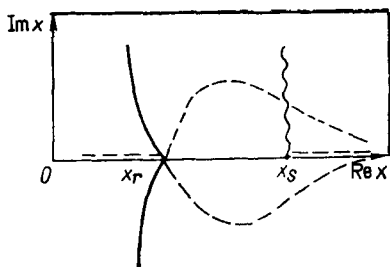


Рис. 1.8. Плоскость комплексного переменного для уравнения Рэлея $[U(x) = -kV_0''(x)/(\omega - kV_0(x))]$: волнистая линия — разрез; сплошные — сопряженные линии Стокса; пунктирные — линии Стокса; x_r — обычная точка поворота; x_s — сингулярная точка поворота

личении градиента скорости интервал значений \tilde{k} , соответствующих устойчивым колебаниям, расширяется.

Колебания неравновесной плазмы часто оказываются неустойчивыми при $V_0(x) = \text{const}$. Проведенное в [16, 29] рассмотрение показывает, что если скорость течения меняется достаточно резко, то определенный класс возмущений стабилизируется. Таким образом, неоднородное движение плазмы может выступать как стабилизирующий фактор. Можно сказать, что при резком изменении скорости поперек течения оно разрывается на отдельные слои, и коллективные самосогласованные колебания с $\text{Im } \omega > 0$ становятся невозможными.

1.5. Неустойчивость Рэлея

Проведенный выше анализ колебаний течений, профиль скорости которых не имеет точек перегиба, показал, что отсутствие незатухающих собственных колебаний, а следовательно, и устойчивость таких течений тесно связаны с сингулярным характером соответствующего дифференциального уравнения. При наличии точки перегиба на профиле скорости $-x_0'(V_0''(x_0) = 0)$ дифференциальное уравнение (1.4) может оказаться регулярным, даже если в какой-то точке течения выполняется резонансное условие $\omega = kV_0(x_s)$. Для этого резонансная точка x_s должна совпасть с точкой перегиба x_0 [$\omega/k = V_0(x_s) = V_0(x_0)$]. [Необходимость выполнения резонансного условия при $\text{Im } \omega = 0$ следует из соотношения (1.8).] Для таких колебаний уравнение Рэлея принимает вид

$$\phi_1'' - k^2 \phi_1 + \frac{V_0''(x)}{V_0(x_0) - V_0(x)} \phi_1 = 0. \quad (1.27)$$

Согласно осцилляционной теореме уравнение (1.27) может иметь дискретный набор собственных функций $\psi_1^{(n)}$, которым со-

ответствуют собственные значения $k^{(n)}$ и, следовательно, частоты $\omega^{(n)} = k^{(n)} V_0(x_0)$, если $U(x) = V_0''(x) / (V_0(x_0) - V_0(x)) > 0$. Это означает, в частности, что величины $V_0'''(x_0)$ и $V_0'(x_0)$ различаются знаками, т. е. например, при $V''(x_0) > 0$ профиль скорости имеет вид, изображенный на рис. 1.2, а. В то же время очевидно, что собственные функции у уравнения (1.27) отсутствуют при $V_0''(x) (V_0(x_0) - V_0(x)) < 0$, когда эффективный потенциал $U(x)$ образует не «яму», а «горб». Эти соображения поясняют смысл условия устойчивости Фьортофта (см., например, [6, 8]), согласно которому течение устойчиво, если найдется константа C , при которой $V_0''(C - V_0) < 0$. [Поскольку V_0'' в точке x_0 меняет знак, константа C совпадает с $V_0(x_0)$.]

Точный критерий появления собственной функции $\psi_1^{(n)}$ у уравнения (1.27) без конкретизации вида профиля $V_0(x)$, по-видимому, указать нельзя, можно лишь утверждать, что для этого эффективная потенциальная яма в уравнении (1.27), характеризующая функцией $U(x)$, должна быть достаточно глубокой и широкой.

Толлмином (см. также [1]) было показано, что если уравнение (1.27) имеет собственные функции $\psi_1^{(n)}$, то колебания со значениями k , несколько меньшими $k^{(n)}$, неустойчивы. Следуя [1], рассмотрим колебания с $k = k^{(n)} + \delta k$, $\omega = k^{(n)} V_0(x_0) + i \text{Im } \omega$, где $|\delta k| \ll k^{(n)}$, $|\text{Im } \omega| \ll k^{(n)} V_0(x_0)$. Такие колебания описываются уравнением, близким к (1.27). Представим его в виде

$$\begin{aligned} \psi_1'' - ((k^{(n)})^2 + 2k^{(n)} \delta k) \psi_1 + \left(\frac{V_0''(x)}{V_0(x_0) - V_0(x)} + \right. \\ \left. + \frac{V_0''(x) (\text{Im } \omega)^2}{(V_0(x) - V_0(x_0)) (k^2 (V_0(x) - V_0(x_0))^2 + (\text{Im } \omega)^2)} - \right. \\ \left. - i \frac{k V_0''(x) \text{Im } \omega}{(k^2 (V_0(x) - V_0(x_0))^2 + (\text{Im } \omega)^2)} \right) \psi_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Слагаемые, пропорциональные δk , $\text{Im } \omega$, $(\text{Im } \omega)^2$, можно учитывать как малые поправки в рамках метода последовательных приближений. В качестве нулевого приближения выберем $\psi_1 = \psi_1^{(n)}$, $k = k^{(n)}$ ($\delta k = 0$), $\omega = \omega^{(n)}$ ($\text{Im } \omega = 0$). При написании условия разрешимости для следующего приближения используем соотношение

$$\frac{\text{Im } \omega}{k^2 (V_0(x) - V_0(x_0))^2 + (\text{Im } \omega)^2} \xrightarrow{\text{Im } \omega \rightarrow 0} \frac{\pi}{k} \delta (V_0(x) - V_0(x_0)),$$

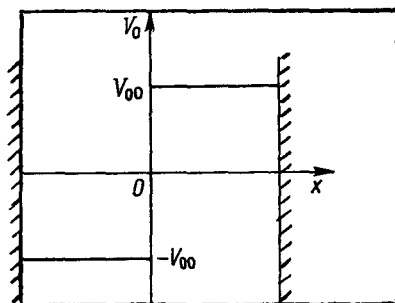
а также учтем, что

$$V_0''(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, \quad \frac{V_0''(x)}{V_0(x) - V_0(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{V_0'''(x_0)}{V_0'(x_0)}.$$

В результате из условия разрешимости получаем:

$$\text{Im } \omega = \frac{2}{\pi} \delta k (k^{(n)})^2 \frac{V_0'(x_0) |V_0'(x_0)|}{V_0'''(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} dx |\psi_1(x)|^2 |\psi_1(x_0)|^{-2}.$$

Рис. 1.9. Профиль скорости течения, в котором развивается неустойчивость Кельвина — Гельмгольца



Поскольку выше считалось, что $V_0'(x_0)/V_0'''(x_0) < 0$, то колебания неустойчивы при $\delta k < 0$.

Проведенный анализ показывает, что наличия точки перегиба на профиле скорости течения недостаточно для его неустойчивости. Так, неустойчивые собственные колебания отсутствуют, если значения $|V_0''(x)|$ и $U(x)$ малы во всем течении, т. е. профиль скорости близок к куэттовскому. Учитывая вид уравнения (1.27), естественно предположить, что с увеличением $U(x)$ первая собственная функция появится при собственном значении $k^{(1)}$, равном нулю, и дальнейший рост $U(x)$ сопровождается ростом $k^{(1)}$. Поскольку колебания с $k < k^{(1)}$ неустойчивы (см. выше), то появление собственного значения $k^{(1)} = 0$ означает, что течение попало на границу области устойчивости. Таким образом, рассмотрение колебаний с $k = 0$ позволяет установить не только необходимое, но и достаточное условие неустойчивости. В случае простейшего профиля скорости с единственной точкой перегиба это условие было получено в [30]:

$$\frac{1}{V_0'(x)(V_0(x_0) - V_0(x))} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{V_0''(x)}{(V_0'(x))^2(V_0(x_0) - V_0(x))} > 0.$$

Если, например $V_0'(x) > 0$ (см. рис. 1.2,а), то первое слагаемое в левой части этого условия отрицательно, и оно может быть выполнено лишь за счет второго. Для этого, как и утверждалось выше, величина $U(x)$ должна быть не просто положительной, но достаточно большой.

В заключение рассмотрим неустойчивость течения со ступенчатым профилем скорости (рис. 1.9). Эту неустойчивость принято называть неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца. При размытии скачка скорости ступенчатый профиль скорости переходит в изображенный на рис. 1.2,а и соответственно неустойчивость Кельвина — Гельмгольца — в рэлеевскую.

Для анализа неустойчивости Кельвина — Гельмгольца удобно использовать уравнение (1.7). Предположим, что скачок скорости расположен посередине течения. Будем использовать систему отсчета, в которой $V_0(x) = V_{00} \operatorname{sgn} x$ (рис. 1.9).

Решение (1.7), удовлетворяющее граничным условиям $\tilde{\psi}_1(a) = \tilde{\psi}_1(-a) = 0$, имеет вид $\tilde{\psi}_1 = \operatorname{sh}(k(a - |x|))$. Из (1.7) получаем условие сопряжения решений при $x = 0$:

$$(\omega - kV_0(\lambda))^2 \frac{d\tilde{\psi}_1}{dx} \Big|_{-a}^a = 0,$$

откуда без труда находим $\omega = ikV_{00}$. Таким образом, в принятой системе отсчета раскачиваются стоячие волны, инкремент которых пропорционален скачку скорости $\Delta V_0 = 2V_{00}$ и волновому числу k .

1.6. Анализ резонансного взаимодействия в течениях идеальной жидкости

1.6.1. Сопоставление рэлеевской неустойчивости с неустойчивостями плазмы. Устойчивость течений с изломом на профиле скорости.

Предшествующее рассмотрение показывает, что устойчивость течений определяется процессами, происходящими в окрестности резонансной точки, где фазовая скорость колебаний совпадает со скоростью течения жидкости. Выше влияние резонансного взаимодействия на колебания течения учитывалось по существу феноменологически — посредством использования правила обхода Ландау при продолжении решения через точку резонанса. Теперь обратимся к непосредственному анализу процесса резонансного взаимодействия.

Понятие о резонансном взаимодействии между частицами сплошной среды и ее колебаниями особенно широко используется в физике плазмы. Во многих случаях именно резонансное взаимодействие определяет эволюцию плазменных колебаний. Как известно, колебания нарастают, если число резонансных частиц, обгоняющих волну (движущихся со скоростью, несколько большей фазовой), превышает число отстающих. В обратном случае колебания затухают. Иными словами, направление эволюции колебаний определяется знаком производной функции распределения заряженных частиц по скоростям df_0/dv при $v = \omega/k$ (рис. 1.10). Если у функции распределения имеется участок с положительной производной, то говорят, что в плазме присутствует пучок заряженных частиц.

Следуя [31], постараемся показать, что в случае идеальной жидкости, сравнивая число резонансных частиц (массу жидкости), обгоняющих волну, с отстающими, можно получить условие неустойчивости Рэлея. Приступая к этой задаче, отметим два обстоятельства.

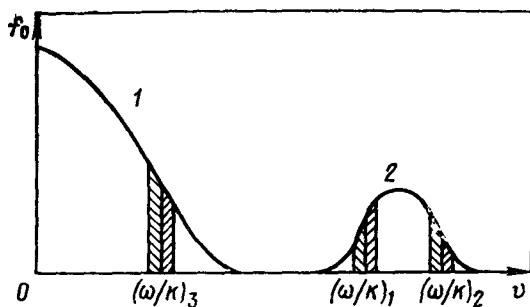


Рис. 1.10. Функция распределения частиц плазмы при наличии пучка:

1 — функция распределения частиц плазмы; 2 — функция распределения частиц пучка; $(\omega/k)_1$ — фазовая скорость нарастающих колебаний, $(\omega/k)_{2,3}$ — то же затухающих; область резонанса заштрихована. Для нарастающих колебаний малой амплитуды $\delta v_s \approx \approx \text{Im } \omega/k$

1. Высказанное выше утверждение относительно связи между направлением эволюции плазменных колебаний и видом функции распределения заряженных частиц по скоростям при $v = \omega/k$, строго говоря, справедливо лишь в случае слабого пучка, когда коллективная степень свободы — самосогласованные плазменные колебания — создается основной плазмой, а роль частиц пучка сводится к резонансной накачке (отбору) энергии. При этом инкремент (декремент) колебаний мал, $|\text{Im } \omega| \ll \omega$. Если число частиц в пучке сравнивается с числом частиц в основной плазме, то $|\text{Im } \omega| \sim \omega$. При этом из-за большого размера резонансной зоны $\delta v_s \sim \text{Im } \omega/k$ резонансное взаимодействие перестает быть локальным в пространстве скоростей. Соответственно и разделение частиц на пучок и основную плазму теряет смысл, поскольку все они участвуют как в поддержании самосогласованных колебаний, так и в накачке (отборе) энергии.

Рассматривавшиеся выше течения с гладкими профилями скорости эквивалентны плазме, пронизываемой «сильным» пучком заряженных частиц. В таких течениях резонансные слои жидкости не только обмениваются энергией с колебаниями, но и существенно влияют на пространственную зависимость последних. Выделение резонансных эффектов в этом случае представляет известные трудности. С интересующей нас точки зрения более привлекательны течения, профиль скорости которых имеет излом (см., например, рис. 1.11). Ниже покажем, что слой жидкости, расположенный в месте излома, может поддерживать самосогласованные колебания, а область резонансного взаимодействия локализуется вне излома. Таким образом, течения с изломом на профиле скорости оказываются эквивалентными плазме со «слабым» пучком заряженных частиц.

2. Понятия «обгоняющий» и «отстающий», обычно используемые при анализе резонансного взаимодействия, зависят от системы отсчета, т. е. являются относительными. В случае плазмы со слабым пучком заряженных частиц систему отсчета обычно выбирают автоматически, поскольку анализ принято проводить, считая, что плазма покоится. Именно такая система отсчета использована на рис. 1.10. Если, однако, перейти в систему отсчета, движущуюся быстрее колебаний, то в ней направление распространения колебаний меняет знак, и соответственно частицы, обгонявшие волну, станут отстающими, и наоборот. Логично и при анализе колебаний течений идеальной жидкости использовать систему отсчета, связанную со слоем жидкости, расположенным в точке излома профиля скорости, который поддерживает самосогласованные колебания течения, т. е. играет роль основной плазмы. В случае течения, изображенного на рис. 1.11, эта система отсчета должна двигаться относительно стенок (лабораторной системы отсчета) со скоростью $V_0(x_c)$.

После этих замечаний обратимся к анализу устойчивости течений идеальной жидкости с изломом на профиле скорости (см. рис. 1.11). Из (1.4) следует, что собственные колебания течения,

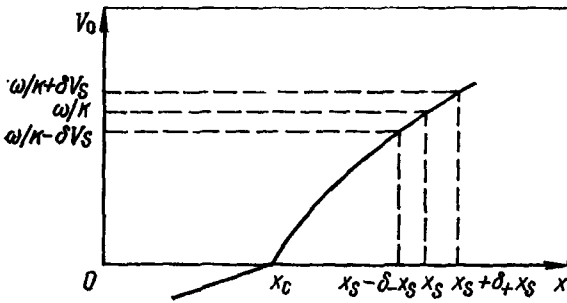


Рис. 1.11. К устойчивости течений с изломом на профиле скорости: x_c — точка излома; x_S — резонансная точка; $\delta_+ x_S$ ($\delta_- x_S$) — часть резонансной зоны, в которой $V_0(x) > \omega/k$ ($V_0(x) < \omega/k$)

если они существуют, связаны с той его частотой, где $V_0''(x) \neq 0$.

Профили скорости типа изображенного на рис. 1.11 характеризуются тем, что в них значения $|V_0''|$ малы во всем течении, за исключением окрестности точки излома x_c , т. е. $V_0''(x) \approx \Delta(V_0')\delta(x-x_c)$, где $\Delta(V_0')$ — скачок производной V_0' в точке x_c . При сделанных предположениях уравнение (1.4) эквивалентно уравнению Шредингера с узкой ямой. В такой яме имеется единственный уровень. В коротковолновом пределе $k|x_2-x_1| \gg 1$ собственная функция уравнения (1.4) и соответствующая ей частота собственных колебаний даются простыми выражениями $\psi_1 \approx \exp(-k|x-x_c|)$, $\omega \approx kV_0[(x_c) + (1/2)\Delta(V_0')]$. Поскольку считаем $V_0'(x) > 0$, $\Delta(V_0') > 0$, то резонансная точка должна находиться справа от точки x_c (см. рис. 1.11). В резонанс с колебаниями попадают слои жидкости, скорость которых лежит в интервале $(\omega/k) + \delta V_S > V_0(x) > (\omega/k) - \delta V_S$. Здесь для нарастающих колебаний с $\text{Im } \omega \gg (kV_0')^{2/3} \nu^{1/3}$ $\delta V_S \approx \text{Im } \omega/k$, если $|\text{Im } \omega| \lesssim (kV_0')^{2/3} \nu^{1/3}$, то в окрестности резонансной точки необходимо учитывать вязкость жидкости, при этом $\delta V_S \approx (V_0')^{2/3} (\nu/k)^{1/3}$. Случай сильнозатухающих колебаний ($|\text{Im } \omega| \gg (kV_0')^{2/3} \nu^{1/3}$) рассмотрен в приложении П. 1. Наконец, для колебаний достаточно большой амплитуды ширина резонансной зоны определяется нелинейными эффектами (см. ниже).

Резонансное взаимодействие стремится выровнять скорость жидкости в резонансном слое, сделав ее равной фазовой скорости колебаний. (Эта тенденция проявляется особенно четко для колебаний большой амплитуды, при анализе которых необходимо учитывать нелинейные эффекты.) Поэтому слои жидкости, обгоняющие колебания, замедляются, отдавая энергию колебаниям, а слои, отстающие от колебаний, ускоряются. Сравним число частиц (массу жидкости), которые отдают энергию колебаниям, с числом частиц, получающих ее от колебаний. В неоднородных течениях распределение по скоростям «развернуто» в пространстве, причем в случае однородной жидкости роль функции распределения играет величина $f_0(V_0) = dx/dV_0$, см., например, [18, 30—33]. Выражение для производной df_0/dV_0 можно представить в виде $df_0/dV_0 = -(dV_0/dx)^{-3} d^2V_0/dx^2$. Поскольку мы считаем, что $V_0'(x) > 0$, то производная df_0/dV_0 положительна, если $V_0''(x_S) < 0$. Необходимость выполнения последнего условия ясно видна из

рис. 1.11. На нем по отдельности изображены части резонансной зоны, в которых расположены слои жидкости, обгоняющие колебания и отстающие от колебаний. Их размеры равны δ_+x_S и δ_-x_S соответственно.

Таким образом, если $V_0''(x_c) > 0$, то течение неустойчиво при $V_0''(x_S) < 0$. Следовательно, в соответствии с теоремой Рэлея величина $V_0''(x)$ должна менять знак в интервале (x_c, x_S) . Отметим также, что поскольку $V_0''(x)$ уменьшается на интервале (x_c, x_S) , то $V_0'''(x) < 0$. Различие знаков $V_0'(x)$ и $V_0'''(x)$ в неустойчивом течении соответствует результатам § 1.5.

При малом инкременте неустойчивости его расчет не представляет труда. Учитывая влияние резонансной области по методу последовательных приближений и определяя резонансный знаменатель как $P/(\omega - kV_0) - i\pi\delta(\omega - kV_0)$, находим

$$\text{Im } \omega = \frac{\pi}{4} \exp(-2k|x_c - x_S|) \frac{V_0''(x_S)\Delta(V_0')}{k|V_0'(x_S)|}.$$

1.6.2. Механизм резонансного взаимодействия. Устойчивость стратифицированных течений. Интерпретация условий устойчивости колебаний на основе сопоставления числа резонансных частиц, обгоняющих волну и отстающих от нее, привычна для теории резонансного взаимодействия. Однако утверждение, что частицы, обгоняющие волну, отдают энергию колебаниям, а отстающие получают ее от колебаний, нельзя понимать буквально. Действительно, в случае колебаний бесконечно малой амплитуды, которые нас в основном интересуют, изменение энергии частиц с $v = \omega/k$ вне зависимости от точного значения скорости определяется локальным значением фазы волны. При этом высказанное выше утверждение справедливо лишь в среднем для ансамблей частиц, обгоняющих волну и отстающих от нее. Игнорирование этого обстоятельства и формальное использование общепринятого критерия может привести к недоразумениям, как, например, в случае колебаний стратифицированного течения (см. ниже).

Напомним сначала, почему именно знак величины df_0/dv определяет направление, в котором передаются энергия и импульс при резонансном взаимодействии заряженных частиц с плазменными колебаниями. Рассмотрим простейшие электронные ленгмюровские колебания, распространяющиеся по Ox в виде гармонической волны $E_1(y, t) = E_1 \cos(ky - \omega t)$. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с колебаниями. В этой системе электрическое поле колебаний становится статическим, $E_1 \cos(ky)$, а скорость резонансных частиц обращается в нуль.

Под действием электрического поля колебаний скорость частиц получает приращение $v_1 = -\frac{eE_1}{m} \cos(ky)t$. Электроны, находящиеся в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \frac{1}{k} < y < \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \frac{1}{k}$, замедляются. В этих областях функция распределения электронов в окрестно-

сти значения $v = \omega/k$ сдвигается по оси v влево. Если $\left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=\omega/k} > 0$, то число замедляемых электронов со временем возрастает. В то же время в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \frac{1}{k} < y < \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \frac{1}{k}$ электроны ускоряются. Здесь функция распределения сдвигается по оси v вправо, и число ускоряемых электронов убывает. Таким образом, при $\left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=\omega/k} > 0$ разность между числом электронов, замедляемых волной и ускоряемых, положительна и возрастает со временем. Естественно, что при этом волне передаются энергия и импульс, и, следовательно, ее амплитуда увеличивается.

Обратимся теперь к колебаниям течения жидкости. Предположим, что в нем возникло возмущение давления $p_1(y, t) = p_1 \cos \Phi$, где $\Phi = ky - \omega t$. В резонансном слое фаза волны на траектории «частиц жидкости» постоянна, поэтому их скорость меняется по закону $V_{1y} = a_1 t$, где $a_1 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{k p_1}{\rho_0} \sin \Phi$. Это

изменение сказывается на положении резонансной точки. Из условия $V_0(x_S) + V_{1y} = \omega/k$ получаем $x_S = x_{S0} - a_1 t / V_0'$, где $x_{S0} = x_S$ при $p_1 = 0$. Полагая для определенности $V_0'(x) > 0$, находим, что в областях, где жидкость ускоряется ($\partial p_1 / \partial y < 0$), резонансная точка сдвигается по оси x влево, а в областях замедления — вправо. Ввиду того, что y -компонент скорости жидкости зависит от координаты x , при этом изменяется размер резонансной зоны δx_S . Используя условие

$$(\omega/k) - \delta V_S < V_0(x) + V_{1y}(x) < (\omega/k) + \delta V_S,$$

для δx_S получаем следующее выражение:

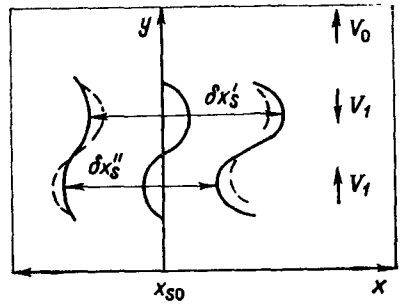
$$\delta x_S \approx 2 \frac{\delta V_S}{V_0'(x_S)} \approx 2 \frac{\delta V_S}{V_0'(x_{S0})} \left(1 - \left(\frac{1}{V_0'} \right)' a_1 t \right).$$

Здесь δV_S — изменение скорости течения в пределах резонансной зоны. Основываясь на выражении для δx_S , можно сделать вывод, что при $V_0' > 0$ колебания должны нарастать, если в точке резонанса $V_0'' < 0$, и затухать, если $V_0'' > 0$. Действительно, при $V_0''(x_S) < 0$ размер резонансной зоны в области, где жидкость тормозится [$a = (k p_1 / \rho_0) \sin \Phi < 0$], оказывается большим, чем в областях, где она ускоряется ($a > 0$), рис. 1.12. Из выражения для силы, с которой колебания действуют на резонансные частицы $F = -\langle \delta x_S (\partial p_1 / \partial y) \rangle_y$, следует, что резонансный слой должен в среднем тормозиться колебаниями, отдавая им свой импульс и энергию. При $V_0'' > 0$ имеем обратное соотношение между размерами резонансных зон в областях ускорения и замедления, поэтому колебания должны затухать.

В соответствии со сказанным в п. 1.6.1 понятия замедления и ускорения, равно как опережения и отставания, разумно исполь-

Рис. 1.12. Определение размера резонансной зоны при наличии возмущения:

$\delta x'_s$ — размер резонансной зоны в области, где жидкость замедляется, $\delta x''_s$ — то же в области, где она ускоряется; x_{s0} — резонансная точка в отсутствие возмущения, предполагается, что $V_0''(x) < 0$



зывать в системе отсчета, где часть течения, которая поддерживает колебания, в среднем покоится. В этой области величина $V_0''(x)$ должна быть положительна, чтобы выполнялось условие $\omega/k > 0$, принятое выше, см. п. 1.6.1. Поэтому условие раскачки колебаний $V_0''(x_s) < 0$, полученное нами, вполне согласуется с условием рэлеевской неустойчивости.

Теперь обратимся к анализу устойчивости стратифицированных течений. Стратифицированными принято называть течения жидкости, плотность которой меняется в направлении поперек течения. Действуя так же, как и при выводе уравнения Рэлея (1.4), нетрудно получить уравнение, описывающее колебания стратифицированного течения, см., например, [5]:

$$(\rho_0 \phi_1')' - k^2 \rho_0 \phi + \frac{(\rho_0 k V_0')'}{\omega - k V_0} \phi_1 = 0. \quad (1.29)$$

Из этого уравнения следует, что для стратифицированных течений величина $(\rho_0 V_0')$ играет ту же роль, что и V_0'' при $\rho_0(x) = \text{const}$. В частности, именно величина $(\rho_0 V_0')$ не должна менять знак, чтобы течение было устойчиво. Основываясь на этом результате, можно было бы предположить, что аналогом $df_0/dV_0 = -V_0''/V_0'^3$ (см. выше) должна быть некоторая величина, пропорциональная $(\rho_0 V_0)'$. Однако распределение массы жидкости по скорости дается выражением $t_0(V_0) = \rho_0/V_0'$ и, следовательно, $df_0/dV_0 = (1/V_0')(\rho_0/V_0)'$. Для того чтобы выяснить, почему устойчивость стратифицированных течений определяется величиной, отличающейся от df_0/dV_0 , необходимо проанализировать процессы, происходящие в резонансной области. Действуя так же, как и в случае однородной жидкости (см. выше), для размера резонансной зоны δx_s нетрудно найти следующее выражение:

$$\delta x_s = 2 \frac{\delta V_s}{V_0'} \left(1 - \left(\frac{1}{\rho_0 V_0'} \right)' \rho_0 a_1 t \right).$$

Оно отличается от приведенного выше для случая однородной жидкости заменой $(1/V_0')' \rightarrow \rho_0(1/\rho_0 V_0')'$. Следовательно, устойчивость стратифицированных течений определяется величиной $(\rho_0 V_0)'$, а не $df_0/dV_0 \sim (\rho_0/V_0)'$. Этот вывод вполне согласует-

ся с видом уравнения (1.29), описывающего колебания стратифицированных течений.

1.6.3. Резонансное взаимодействие колебаний конечной амплитуды. Нелинейная стадия развития неустойчивости изучалась в [34—38]. Показано, что в резонансной области частицы жидкости «захватываются» волной. Чтобы составить представление о характере возникающего при этом течения, рассмотрим уравнение (1.2) в стационарном случае. В системе отсчета, движущейся вместе с волной, оно принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0. \quad (1.30)$$

Это уравнение показывает, что сохраняющаяся величина (ротор скорости $\Delta \psi$) переносится по линиям тока ($\psi = \text{const}$). Поэтому вполне естественно, что течение будет стационарным, лишь если выполняется соотношение

$$\Delta \psi = F(\psi), \quad (1.31)$$

где ψ — произвольная функция.

Пусть $F(\psi) = C\psi$. В этом простейшем случае выберем решение (1.31) в виде

$$\begin{aligned} \psi = & -C^{-1}V_0'(x_S) \operatorname{ch}(C^{1/2}(x-x_S)) + \\ & + \psi_1 \exp\{-(k^2 + C)^{1/2}(x-x_S)\} \cos(ky). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Здесь первое слагаемое $\psi_0(x) = -C^{-1}V_0'(x_S) \operatorname{ch}(C^{1/2}(x-x_S))$ описывает невозмущенное течение. Поскольку используется система отсчета, в которой волна покоится, точка, в которой скорость невозмущенного течения обращается в нуль, может быть названа резонансной x_S . Чтобы представить характер течения в окрестности резонансной точки, разложим $\psi_0(x)$, $\psi_1(x, y)$ в ряд по малой разности $(x-x_S)$. Оставляя в (1.32) первые существенные слагаемые, получаем:

$$\psi(x, y) \approx -\frac{1}{2}V_0'(x_S)(x-x_S)^2 + \psi_1 \cos(ky). \quad (1.33)$$

Как известно, в силу соотношений $V_x = \partial \psi / \partial y$, $V_y = -\partial \psi / \partial x$ функция тока играет роль гамильтониана (движение происходит по линиям $\psi = \text{const}$), а переменные x, y — гамильтоновых переменных — координаты и импульса соответственно. Используя эту аналогию, заметим, что линии тока, описываемые (1.33), имеют точно такой же вид, как и фазовые траектории заряженных частиц, движущихся в поле плазменных колебаний конечной амплитуды (см., например, [39]). В гидродинамике картина линий тока, изображенная на рис. 1.13, была получена Кельвиным, который усмотрел в ней сходство с кошачьими глазами. Название «кошачьи глаза» иногда используется и в настоящее время.

Рассматриваемое течение характеризуется тем, что его невозмущенная часть, зависящая только от x , удовлетворяет соотноше-

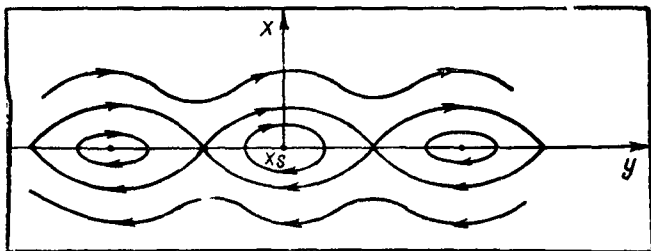


Рис. 1.13. Нелинейное течение в окрестности резонансной точки при $V_0''(x_s) = 0$ [используется система отсчета, в которой волна покоится ($V_0(x_s) = 0$)]

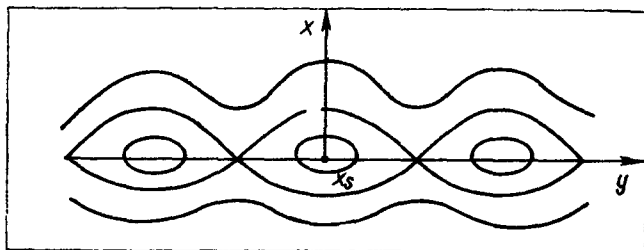


Рис. 1.14. Нелинейное течение в окрестности резонансной точки при $V_0''(x_s) < 0$ (используется та же система отсчета, что на рис. 1.13)

нию ($V_0(x_s) = V_0''(x_s) = 0$). Это же соотношение выполняется и для решений общего уравнения (1.31) ($V_0'' = \frac{dF}{d\psi} V_0$). Совпадение резонансной точки с точкой перегиба, по-видимому, не случайно. Действительно, если решение (1.30) можно разложить на составляющие $\psi_0(x)$, $\psi_1(x, y)$, то при $\psi_1 \rightarrow 0$ мы должны получить переход к линейной теории. Однако, как показано в § 1.5, нейтральные колебания, которые в системе покоя волны дают стационарное течение, должны удовлетворять условию $x_s = x_0$, где x_0 — точка перегиба.

В рассматриваемых течениях профиль скорости антисимметричен относительно точки x_0 , взятой за начало отсчета. Поэтому при возникновении возмущения конечной амплитуды волна захватит равные «числа частиц», обгоняющих волну и отстающих от нее (рис. 1.13). Следовательно, только в этом случае захват частиц жидкости волной не будет приводить к изменению ее амплитуды. По-иному развиваются возмущения при $V_0''(x_s) \neq 0$. Пусть в начальный момент времени функция тока дается выражением

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2} V_0'(x - x_s)^2 - \frac{1}{6} V_0''(x - x_s)^3 + \psi_1 \cos(ky), \quad (1.34)$$

где $V_0'(x_s) > 0$, $V_0''(x_s) < 0$. В этом случае в области $x > x_s$ будет захвачена большая масса жидкости (рис. 1.14*). Если колебания

* Отметим, что при $V_0''(x_s) \neq 0$ картину движения можно сделать симметричной относительно точки x_s , если вместо x использовать переменную V_0 . При этом необходимо учитывать различные значения функции распределения $f_0(V_0) = dx/dV_0$ в областях $V_0 > \omega/k$ и $V_0 < \omega/k$. При малой амплитуде колебаний разность определяется первой производной $df_0/dV_0 = -V_0''/(V_0')^3$.

поддерживаются течением в области $x < x_s$, то преимущественный захват частиц жидкости, опережающих волну, сопровождается ростом ее амплитуды. В то же время при $V''_0(x_s) > 0$ колебания затухают. Таким образом, рассматриваемые возмущения конечной амплитуды эволюционируют в общих чертах так же, как бесконечно малые.

Если течение, описываемое (1.34), стационарно, то частицы жидкости движутся по периодическим траекториям (см. рис. 1.14), причем, как нетрудно показать, частота $\Omega \sim \psi_1^{1/2}$.

До тех пор пока формально рассчитанная частота удовлетворяет условию $\Omega \ll |\text{Im } \omega|$, эволюцию возмущений можно описывать в рамках линейного приближения. При $\Omega \gtrsim |\text{Im } \omega|$ эффективность обмена энергией между колебаниями и течением падает, что можно учесть, модифицируя правило обхода резонансной точки [33, 34]. Полному прекращению обмена — «отключению» резонансных частиц — соответствует рассмотрение особенности в уравнении Рэлея в смысле главного значения, см. § 1.3.

1.7. Влияние вязкости на устойчивость течений

1.7.1. Неустойчивые колебания. Некоторые течения, профиль скорости которых не имеет точек перегиба, становятся неустойчивыми под влиянием вязкости. Впервые вывод о дестабилизирующем воздействии вязкости был сделан Гейзенбергом, см. также [1], при анализе устойчивости плоского Пуазейлевского течения.

Учет вязкости повышает порядок дифференциального уравнения малых колебаний жидкости до четвертого [см. уравнение Орра — Зоммерфельда (1.13)]. Анализ этого уравнения представляет значительные трудности, усугубляемые тем обстоятельством, что коэффициент перед старшей производной мал — обратно пропорционален числу Рейнольдса, которое в неустойчивых течениях весьма велико. Для решения подобных уравнений были разработаны специальные численные методы, см., например, [1, 5, 7]. Не повторяя анализ уравнений Орра — Зоммерфельда, дадим лишь физическую интерпретацию полученных результатов.

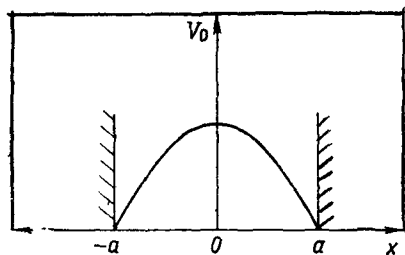


Рис 1.15. Профиль скорости плоского Пуазейлевского течения

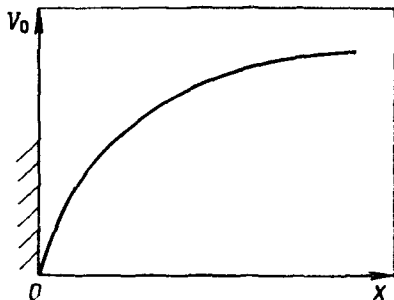


Рис 1.16. Профиль скорости течения в пограничном слое при отсутствии точки перегиба

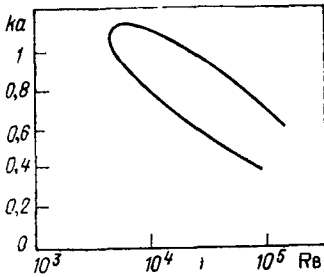


Рис. 1.17. Область неустойчивости плоского пуазейлевского течения: $V_0(x) = V_{00}(1 - (x/a)^2)$; $Re = V_{00}a/\nu$

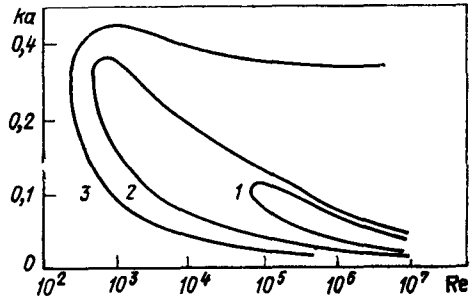


Рис. 1.18. Область неустойчивости течения в пограничном слое [2]:

1 — профиль скорости с «отсосом» $V_0(x) = V_{00}(1 - e^{-x/a})$; 2 — профиль скорости Блаузуна; 3 — профиль скорости с точкой перегиба (качественная зависимость)

Влияние вязкости оказывается дестабилизирующим для течений двух типов: плоского пуазейлевского и течения в пограничном слое (рис. 1.15, 1.16). В обоих случаях область неустойчивости на плоскости (Re, k) имеет сходный вид (рис. 1.17, 1.18). Характерно, что при исчезающей вязкости ($Re \rightarrow \infty$) интервал неустойчивых значений k стягивается к значению $k=0$ и также $Im \omega \rightarrow 0$. Это означает, что в пределе $Re = \infty$ (идеальная жидкость) получаются нейтральные колебания с $k=0$. Однако согласно теореме Рэлея в течениях с профилем скорости без точек перегиба отсутствуют не только нарастающие, но и нейтральные колебания. Исключение составляет лишь вырожденный случай колебаний с $k \rightarrow 0$, $\omega/k \rightarrow 0$ в течениях, на обеих границах которых невозмущенная скорость обращается в нуль: $V_0(x_1) = V_0(x_2) = 0$ (см. § 1.1). Этим условиям удовлетворяет пуазейлевское течение. (Вырожденные колебания течения в пограничном слое рассмотрены ниже.) Анализ, проведенный в § 1.1, показывает, что в вырожденных колебаниях $\psi_1(x) = CV_0(x)$. Если неустойчивость обусловлена раскачкой именно таких колебаний, то при больших числах Рейнольдса профиль неустойчивого возмущения должен быть близок к $V_0(x)$. Этот вывод подтверждается результатами [7], где приведена пространственная зависимость неустойчивого возмущения в пуазейлевском течении.

Излагаемая точка зрения на неустойчивость, вызываемую вязкостью, позволяет понять, почему эта неустойчивость не развивается при пуазейлевском течении в круглой трубе $V_0(r) = V_{00}(1 - (r/a)^2)$. В последнем случае уравнение малых колебаний при $k \rightarrow 0$, $\omega/k \rightarrow 0$ формально также имеет вырожденное решение $\psi_1(r) = CV_0(r)$, описывающее аксиально-симметричные колебания. Однако это решение не удовлетворяет граничному условию в центре трубы $V_{r1} = (ik/r)\psi_1 = 0$, поскольку $V_0(0) \neq 0$.

Обратимся теперь к колебаниям в пограничном слое. Вырожденное решение $\psi_1(x) = CV_0(x)$ не удовлетворяет условию $\psi_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$

$\rightarrow 0$, поэтому предельные переходы $k \rightarrow 0$, $\omega/k \rightarrow 0$ должны быть рассмотрены более внимательно. Пусть характерный масштаб изменения скорости равен a . Рассмотрим колебания с $k \ll a^{-1}$ на трех перекрывающихся интервалах: 1) $0 \leq x \ll k^{-1}$; 2) $a \ll x \ll k^{-1}$; 3) $a \ll x < \infty$. Уравнение (1.4) и его решения в каждом из интервалов можно представить в приближенном виде:

$$1) \psi_1'' + \frac{V_0''}{\omega/k - V_0} \psi_1 = 0;$$

$$\psi_1^{(1)} = C_1^{(1)}(V_0(x) - \omega/k) + C_2^{(1)}(V_0(x) - \omega/k) \int^x d\lambda (V_0(\lambda) - \omega/k)^{-2};$$

$$2) \psi_1'' = 0;$$

$$\psi_1^{(2)} = C_1^{(2)} + C_2^{(2)}x;$$

$$3) \psi_1'' - k^2\psi_1 = 0;$$

$$\psi_1^{(3)} = C_1^{(3)} \exp(-kx) + C_2^{(3)} \exp(kx).$$

Решение ограничено при $x \rightarrow \infty$, если $C_2^{(3)} = 0$. Продолжая решение $\psi_1^{(3)}(x) = C_1^{(3)} \exp(-kx)$ последовательно в области 2 и 1, находим $C_1^{(2)} \approx C_1^{(3)}$, $C_2^{(2)} \approx -kC_1^{(3)}$, $C_1^{(1)} \approx C_1^{(3)}/V_{00}$, $C_2^{(1)} \approx -kV_{00}C_1^{(3)}$, где $V_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} V_{00}$. В результате в области 1 получаем:

$$\psi_1^{(1)}(x) \approx \frac{C_1^{(3)}}{V_{00}} (V_0(x) - \omega/k) \left(1 - k \int_0^x dx \left(\frac{V_{00}}{V_0(x) - \omega/k} \right)^2 \right).$$

Полученное выражение при $k \rightarrow 0$, $|\omega|/k \rightarrow 0$ удовлетворяет граничному условию в нуле: $\psi_1(0) = 0$.

Проведенное обсуждение показывает, что колебания в пограничном слое захватывают обширную пассивную область почти однородного течения ($V_0(x) \approx V_{00}$) размером $\delta x \sim k^{-1} \gg a$. Поэтому течение в пограничном слое должно быть более стабильным, чем паузейлевское: уже область неустойчивости, а при сравнимых параметрах меньше ее инкремент. Численные расчеты показывают, что это действительно так (см. рис. 1.17 и кривую 1 на рис. 1.18) [2]. Последняя кривая рассчитана для профиля скорости с $V''_0(x)$, монотонно уменьшающейся при удалении от стенки. Стационарное обтекание бесконечной пластины при отсутствии градиента давления характеризуется немонотонным изменением $V''_0(x)$, причем $V''_0(x) \rightarrow 0$ также и у поверхности пластины (профиль Блаузиуса, см., например, [4]). Наличие точки перегиба, хотя в случае профиля Блаузиуса она и попадает на границу течения, оказывает дестабилизирующее воздействие, приводя к расширению области «вязкой» неустойчивости (см. кривую 2 на рис. 1.18). Если же точка перегиба смещается внутрь потока, то меняется характер неустойчивости, поскольку течение остается неустойчивым даже в пределе $Re \rightarrow \infty$ (неустойчивость Рэлея), см. кривую 3 на рис. 1.18.

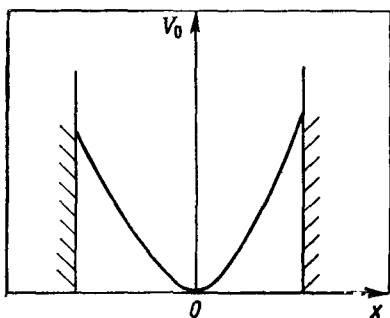


Рис. 1.19. Профиль скорости с изломом, эквивалентный пузелейскому (используется система отсчета, в которой точка излома покоится, а скорость жидкости положительна.)

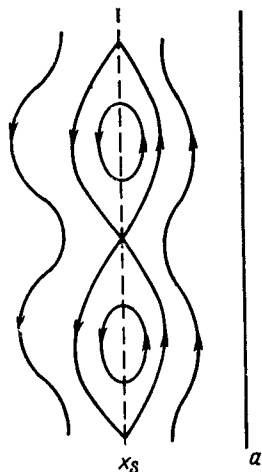


Рис. 1.20. К раскачке колебаний конечной амплитуды под действием вязкости: x_s — резонансная точка, стенка расположена при $x=a$

1.7.2. Механизм неустойчивости. Теперь, следуя [40], постараемся понять, почему вязкость вызывает раскачку анализируемых колебаний. Рассмотрим этот вопрос на более простом примере пузелейского течения. Как и в § 1.6, заменим пузелейский профиль скорости профилем, в котором $|V''_0(x)|$ всюду мал, за исключением точки излома, расположенной посредине течения $[V''_0(x) \approx \Delta(V'_0)\delta(x)]$, рис. 1.19. Вязкость размывает области резкого изменения $V'_0(x)$, поэтому при учете вязкости рассматриваемое течение становится существенно нестационарным. Однако этот аспект влияния вязкости можно значительно ослабить, если рассмотреть течение, в котором $V'_0(x)$ меняется в малой, но конечной области δx . Размер области не сказывается в проводимом ниже анализе до тех пор, пока выполняется условие $\delta x \ll k^{-1}$.

Перепишем уравнение Орра — Зоммерфельда в виде

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)\psi_1 + \frac{kV_0''}{\omega - kV_0}\psi_1 = \frac{i\nu}{\omega - kV_0}\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)^2\psi_1. \quad (1.35)$$

При малой вязкости, действуя по методу последовательных приближений, пренебрежем сначала правой частью (1.35). Решение укороченного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям $\psi_1(\pm a) = 0$, имеет вид $\psi_1 \approx \text{sh}(k(a - |x|))$. Частота соответствующих колебаний $\omega = (1/2)\Delta(V'_0)\text{th}(ka) < kV_0(a)$. Как и следовало ожидать, при $k \rightarrow 0$ получаем $\psi_1 \rightarrow CV_0(x)$, $\omega \rightarrow kV_0(a)$.

Вязкость жидкости существенна в пристеночном слое, а при $V''_0(x_s) \neq 0$ и в окрестности резонансной точки. В первой области действие вязкости приводит к обращению в нуль тангенциального компонента скорости $V_{1y} = d\psi_1/dx$, во второй размывает особенность возмущения $\psi_1(x)$. Предположим для простоты, что значе-

ние $|V''_0(x_s)|$ достаточно мало, и учтем влияние вязкости только в пристеночном слое. Действуя по методу последовательных приближений, для поправки к частоте собственных колебаний получаем следующее выражение:

$$\delta\omega = -i \frac{\nu}{\omega - kV_0(a)} \frac{\Delta(V_0')}{k} \text{th}^2(ka) \int_{a-\delta x}^a dx |\Delta\phi_1|^2. \quad (1.36)$$

Здесь $a \gg \delta x \gg \delta_\nu x$, $\delta_\nu x = |\nu/\omega - kV_0(a)|^{1/2}$ — характерный масштаб спада «вязкого» решения внутри течения [1].

Выражение (1.36) наглядно показывает, что действие вязкости в пристеночном слое является стабилизирующим, если пристеночный слой отстает от колебаний ($\omega/k > V_0(a)$), и дестабилизирующим, если он обгоняет колебания ($\omega/k < V_0(a)$). Здесь в соответствии со сказанным в § 1.6 термины «отстающий» и «опережающий» используются в системе отсчета, в которой точка излома на профиле скорости покоится. Отметим, что в этой системе стенка движется вверх по течению, опережая колебания.

Влияние пристеночного слоя возрастает при $\omega/k \rightarrow V_0(a)$, когда резонансная точка приближается к стенке. Именно такие колебания неустойчивы в паузейлевском течении и в течении типа пограничного слоя. Проанализируем механизм неустойчивости. В обоих течениях величина $V''_0(x)$ нигде не меняет знака, и поэтому число резонансных частиц, опережающих колебания, меньше числа отстающих. Соответственно в случае идеальной жидкости колебания затрачивали бы больше энергии на ускорение отстающих резонансных частиц, чем получали от опережающих. Однако вязкость вовлекает в процесс резонансного взаимодействия еще один объект — стенку. В данном случае стенка опережает колебания и поэтому увлекает за собой резонансные частицы, обгоняющие волну, стремясь поддержать их скорость постоянной. В результате возникают постоянные потоки энергии и импульса от стенки к колебаниям через посредство резонансных частиц. Этот процесс становится особенно наглядным для колебаний конечной амплитуды. В рассматриваемом случае в системе отсчета, движущейся вместе с волной, для функции тока справедливо выражение (1.34). Соответствующая картина линий тока изображена на рис. 1.20. Захватываемые частицы осциллируют относительно точки x_s . Каждый раз, когда они приближаются к стенке, стенка передает частицам жидкости импульс, направленный вверх по течению. Этот импульс затем переходит к колебаниям, что и ведет к их раскачке.

1.7.3. Энергия неустойчивых колебаний. Выше при анализе механизма раскачки колебаний мы использовали систему отсчета, связанную с точкой излома на профиле скорости. Теперь рассмотрим неустойчивость в лабораторной системе отсчета, где покоится стенка. В этой системе жидкость под действием вязкости тормозится у стенки, что приводит к диссипации энергии колебаний. Если при этом колебания нарастают, то их энергия в рассматриваемой системе отсчета отрицательна.

Как обычно, энергию колебаний U определим, используя соотношение $\dot{U}=A_{ст}$, где $A_{ст}$ — работа сторонних сил. В данном случае под сторонней будем понимать силу вязкости. Введем в уравнение (1.1) стороннюю силу $F_{ст}$, помножим его на V и проинтегрируем по частям, учитывая несжимаемость жидкости ($\text{div } V=0$) и условие обращения в нуль нормального компонента скорости на границе:

$$\frac{\rho}{2} \int dx \frac{\partial}{\partial t} V^2 = A_{ст}.$$

Здесь $A_{ст}$ — работа сторонних сил, рассчитанная на единицу длины по Oy , т. е. вдоль невозмущенного течения.

При наличии в течении малых колебаний $V=V_0+V_1$. Усреднение по времени дает $\bar{V}^2=\bar{V}_0^2+\overline{|V_1|^2}$, соответственно $A_{ст}=A^{(0)}+A^{(1)}$. Представим $|V_1|^2$ в виде $\overline{|V_1|^2}=\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|^2+k^2|\psi_1|^2$. Интегрируя выражение для $A^{(1)}$ по частям и используя уравнение Рэлея (1.4), получаем:

$$A^{(1)} = \frac{\rho}{2} \int dx \frac{kV_0''}{(\omega - kV_0)} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1|^2. \quad (1.37)$$

При вычислении $A^{(0)}$ учтем (см. выше), что амплитуда колебаний меняется значительно быстрее, чем деформируется профиль скорости $V_0(x)$ под действием вязкости. Это условие позволяет опустить силу вязкости из y -компонента уравнения движения, усредненного по малым колебаниям:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + V_{x1}^* \frac{\partial}{\partial x} V_{y1} + V_{x1} \frac{\partial}{\partial x} V_{y1}^* = 0.$$

Используя также уравнение Рэлея, в котором частоту будем считать комплексной ($\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$, $\text{Im } \omega |\psi_1| = \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1|$), преобразуем выражение для $A^{(0)}$ к виду

$$A^{(0)} = \frac{\rho}{2} \int dx \frac{k^2 V_0 V_0''}{(\omega - kV_0)^2} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1|^2. \quad (1.38)$$

Суммируя (1.37) и (1.38), получаем:

$$A_{ст} = \frac{\rho}{2} \int dx \frac{\omega k V_0''}{(\omega - kV_0)^2} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1|^2.$$

Последнее равенство показывает, что энергия колебаний дается выражением

$$U = \frac{\rho}{2} \int dx \frac{\omega k V_0''}{(\omega - kV_0)^2} |\psi_1|^2. \quad (1.39)$$

В соответствии с проведенным выводом величину U можно считать составленной из двух частей, $U = U^{(0)} + U^{(1)}$:

$$U^{(0)} = \frac{\rho}{2} \int dx \frac{k^2 V_0 V_0''}{(\omega - kV_0)^2} |\psi_1|^2; \quad (1.40)$$

$$U^{(1)} = \frac{\rho}{2} \int dx \frac{k V_0''}{(\omega - kV_0)} |\psi_1|^2. \quad (1.41)$$

Здесь $U^{(1)}$ — собственно колебательная энергия, $U^{(0)}$ — изменение энергии основного течения при возбуждении колебаний. Поскольку скорость жидкости V_0 относительна, а величины $\omega - kV_0$, V_0'' одинаковы во всех системах отсчета, то $U^{(0)}$ зависит от системы отсчета, в то время как величина $U^{(1)}$ инвариантна. Собственно колебательную энергию $U^{(1)}$ можно представить в виде $U^{(1)} = (\rho/2) \int dx |\mathbf{V}_1|^2 > 0$.

Положительная определенность выражения (1.41) устанавливается наиболее просто для рассматривавшихся выше течений с изломом на профиле скорости. Действительно, в системе отсчета, движущейся вместе с точкой излома, частота собственных колебаний $\omega - kV_0(x_c) = (1/2) \Delta(V_0') \operatorname{th}(ka)$ (см. выше) имеет тот же знак, что $V_0''(\Delta(V_0') = \int dx V_0''(x))$. В предельном случае коротковолновых колебаний ($ka \gg 1$) для $U^{(1)}$ получаем особенно простое выражение: $U^{(1)} = \rho k |\psi_1(x_c)|^2$.

Что касается величины $U^{(0)}$, то ее знак может меняться. Соответственно может меняться и знак суммарной энергии колебаний (1.39). Обратимся к течению с изломом на профиле скорости, чтобы установить, при каких условиях энергия колебаний становится отрицательной. Будем считать для определенности, что $V_0'' > 0$ (см. рис. 1.19). В системе отсчета, связанной с точкой излома, частота собственных колебаний положительна. Рассмотрим новую систему отсчета, движущуюся относительно точки излома быстрее колебаний $V > \omega/k$. При переходе в эту систему частота колебаний сменит знак: $\omega \rightarrow \omega - kV$. Вместе с частотой колебаний станет отрицательной и их энергия (1.39). Если частота колебаний по определению положительна, то в этой системе отсчета отрицательным следует считать волновое число — колебания бегут в сторону отрицательных значений координаты y ($\omega/k < 0$). Теперь вспомним, что рассматривавшиеся в п. 1.7.2 неустойчивые колебания в лабораторной системе отсчета, где стенка покоится, имели отрицательную частоту (в системе отсчета, связанной с точкой излома, стенка обгоняет колебания.) Следовательно, их энергию в лабораторной системе отсчета также необходимо считать отрицательной. Поэтому вполне естественно, что диссипация энергии колебаний у стенки вызывает раскачку колебаний.

Отметим, что в лабораторной системе отсчета отрицательна и скорость течения ($V_0(x) < 0$). Если обратить направление оси OY , то величины $V_0(x)$, ω/k в лабораторной системе отсчета станут положительными, однако одновременно в рассматриваемом тече-

нии изменится знак $\Delta(V'_0)$, V''_0 . В результате энергия колебаний останется отрицательной.

Проведенный анализ показывает, что неустойчивость течений с профилем скорости без точек перегиба, которая обусловлена действием вязкости жидкости, в лабораторной системе отсчета можно рассматривать как диссипативную неустойчивость колебаний с отрицательной энергией.

1.8. Неустойчивости течений как результат действия напряжения Рейнольдса

Выше основные закономерности, определяющие устойчивость неоднородных течений, интерпретировались в терминах резонансного взаимодействия между колебаниями течения и движением жидкости. Разумеется, этот подход — не единственно возможный. Часто, см., например, [1], раскачку колебаний в неоднородных течениях связывают с действием рейнольдсова напряжения сдвига $\tilde{W} = -\rho V_x V_y$.

Напряжение Рейнольдса осуществляет обмен энергией между колебаниями и основным течением. Чтобы убедиться в этом, помножим линеаризованное по малым возмущениям уравнение движения (1.1) скалярно на \mathbf{V} и проинтегрируем по объему, занятому жидкостью. (Поскольку вдоль течения система однородна, интеграл по dy берется по единичной длине). Учитывая условие $V_{x1} = 0$ на стенках, ограничивающих течение, получаем:

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int dx |\mathbf{V}_1|^2 = - \int dx V_0(x) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}. \quad (1.42)$$

Это выражение показывает, что напряжение Рейнольдса создает силу, параллельную невозмущенной скорости $F_y = -\rho \frac{\partial}{\partial x} \text{Re} V_{x1} V_{y1}^*$.

За счет работы силы F_y над основным течением изменяется энергия возмущения. Покажем, что, рассматривая раскачку колебаний как результат действия напряжений Рейнольдса, можно подтвердить ряд выводов, сделанных выше. Представим соотношение (1.5) в виде

$$\frac{d\tilde{W}}{dx} = \frac{\text{Im } \omega k^2 V_0''}{|\omega - k V_0|^2} \rho |\psi_1|^2. \quad (1.43)$$

Оно показывает, что для неустойчивости идеальной жидкости необходимо наличие неоднородного напряжения Рейнольдса. В соответствии с теоремой Рэлея неустойчивые течения должны иметь точку перегиба на профиле скорости, в которой $V''_0(x) = 0$. Правая часть (1.42) не меняется при переходе из одной системы отсчета скорости в другую, что соответствует сдвигу скорости $V_0(x)$ на постоянную величину $V_0(x) \rightarrow V_0(x) + \text{const}$. Будем считать, что $V_0(x_0) = 0$, где x_0 — точка перегиба на профиле скорости. Тогда

правая часть (1.42) будет заведомо положительной, если $V_0(x)V''_0(x) < 0$. Это означает, что профиль скорости должен иметь вид, изображенный на рис. 1.2,а. Таким образом, мы иным путем пришли к условию неустойчивости течений идеальной жидкости, полученному в § 1.5.

В случае неустойчивости, вызываемой вязкостью жидкости, соотношение (1.43) справедливо во всем течении, за исключением узкого пристеночного слоя. В этом слое должно создаваться напряжение Рейнольдса, которое во внутренней области «тратится» в соответствии с (1.43) на раскачку колебаний [1]. [Напомним, что полное изменение величины \tilde{W} на интервале x_1x_2 равно нулю, а «вязкая» неустойчивость существенна для течений, в которых $V''_0(x)$ не меняет знак.]

Будем рассматривать вязкую силу F_v как стороннюю, действующую на идеальную жидкость. Наличие сторонней силы в уравнении движения (1.1) приводит к появлению правой части в уравнении малых колебаний [ср. с (1.4)]:

$$i(\omega - kV_0)(\psi''_1 - k^2\psi_1) + ikV''_0\psi_1 = \text{rot}_z F_v. \quad (1.44)$$

Умножим последнее уравнение на ψ^*_1 и сложим результат с комплексно-сопряженным:

$$\left(-\frac{\omega}{k} + V_0(x)\right) d\tilde{W}/dx = A_{ct}. \quad (1.45)$$

Здесь $A_{ct} = (\rho/2)\psi^*_1 \text{rot}_z F_v + \text{с.с.}$ Это выражение дает работу вязких сил в единице объема. (В силу граничного условия $\psi_1 = 0$ интеграл от величины A_{ct} по объему, занятому жидкостью, совпадает с интегралом от $\mathbf{V}F_v$.)

Обратимся теперь к уравнению (1.43). Рассмотрим, например, паузейлевское течение. Будем, как и в § 1.7, использовать систему отсчета, где покоится середина течения, а скорости жидкости и стенок положительны. В этой системе величина V''_0 положительна, следовательно, для раскачки колебаний должно выполняться условие $d\tilde{W}/dx > 0$. Поскольку на стенке $\tilde{W} = 0$, то в пристеночном слое величина $d\tilde{W}/dx$ должна быть отрицательной. Однако силы вязкости могут производить лишь отрицательную работу. Следовательно, согласно (1.45) для неустойчивости необходимо, чтобы пристеночный слой обгонял колебания ($V_0(x) > \omega/k$). Именно этот вывод был сделан в п. 1.5.2.

1.9. Эволюция начальных возмущений в течениях жидкости

1.9.1. Псевдоволны в теории плазменных колебаний. Часто считают, что для исследования эволюции начальных возмущений в сплошной среде достаточно определить спектр «собственных колебаний среды и найти соответствующие собственные функции. Такая точка зрения оправдана, если собственные функции составляют полную систему, по которой можно разложить произвольное начальное возмущение. Между тем выше было показано, что у

уравнения Рэлея, описывающего колебания течений идеальной жидкости, отсутствуют собственные функции, соответствующие незатухающим колебаниям, если профиль скорости течения не имеет точек перегиба. При учете конечной вязкости жидкости собственные колебания, вообще говоря, могут появиться. Однако они будут затухающими, причем декремент колебаний, локализованных во внутренней части течения, по порядку должен быть не меньше $k\Delta V_0$, где ΔV_0 — перепад скорости течения (см. приложение П.1). Если предположить, что колебания подобного типа составляют полную систему, то приходим к неправдоподобному выводу о быстром затухании произвольных, в том числе гладких возмущений, под действием вязкости при $Re \rightarrow \infty$.

Как же поступить, если система собственных функций неполна? Ответ на этот вопрос дает теория колебаний другой сплошной среды — плазмы. В разреженной плазме, где соударения заряженных частиц достаточно редки, функция распределения частиц по скоростям может существенно отличаться от равновесной — максвелловской. Для того чтобы полностью охарактеризовать состояние такой плазмы, необходимо знать не только положение заряженных частиц, но и их скорости, т. е. использовать кинетическое описание. Вид функции распределения заряженных частиц по скоростям сказывается на эволюции начальных возмущений. Так, если заряды, создающие возмущение электрического потенциала, в начальный момент покоились, то в плазме возникнут хорошо известные ленгмюровские колебания. Если же эти заряды двигались с одной и той же достаточно большой скоростью v_0 , то и возмущение электрического потенциала будет переноситься со скоростью $\approx v_0$, превышающей скорость распространения ленгмюровских колебаний, и т. д. Поэтому хотя собственные ленгмюровские колебания плазмы описываются полной системой функций в обычном пространстве, использование этой системы не позволяет проследить за эволюцией произвольного начального возмущения. «Недостаточность решений вида $\exp(-i\omega t + ikr)$ видна уже из того, что они дают лишь ∞^3 множество решений (соответственно трем независимым параметрам: k_x, k_y, k_z), между тем как в действительности должно иметься ∞^6 множеств решений (уравнения содержат шесть независимых переменных: x, y, z, v_x, v_y, v''_z)» [15]. (В [15] рассматривалась однородная плазма, собственные колебания которой имеют вид плоских волн.) Однако уравнения Максвелла вместе с кинетическим уравнением содержат всю информацию о поведении плазмы, и поэтому их анализ должен дать ответ на вопрос об эволюции произвольного начального возмущения. В [15] показано, что при этом удобно использовать метод преобразования Лапласа по времени. Таким способом в [15, 41] были выявлены элементарные возмущения, составляющие полную систему в 6-мерном фазовом пространстве. В теории плазмы эти возмущения фигурируют под различными названиями, из которых наиболее распространены волны ван Кампена и псевдоволны. Их аналог в теории колебаний идеальной жидкости иногда называют волнами

Кэйза. (Правильнее было бы «волны Кэйза — Дикого», см. ниже.) Мы предпочитаем оба вида возмущений называть псевдоволнами, поскольку это название «подчеркивает неполноценный характер рассматриваемых образований, распространение которых представляет лишь имитацию волнового процесса» [13].

Роль псевдоволн в теории плазмы достаточно подробно освещена в [13]. Здесь напомним лишь самые основные моменты. В простейшем случае однородной немагнитической плазмы псевдоволна создается совокупностью заряженных частиц, заполняющих все пространство и движущихся с одной и той же скоростью v_0 . Если плотность частиц модулирована в направлении движения с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, то в лабораторной системе координат будет наблюдаться волна электрического поля с частотой $\omega = kv_0$. Поскольку скорость частиц v_0 может меняться непрерывно, то непрерывен и частотный спектр псевдоволн.

Под действием кулоновских столкновений дисперсия в значениях скорости частиц, образующих псевдоволну, возрастает по закону $\delta v_0(t) = (\langle (v_0(t) - v_0)^2 \rangle)^{1/2} \approx v_0(\nu t)^{1/2}$, где ν — частота столкновений. В результате исходная псевдоволна превращается в набор псевдоволн, скорости которых различаются на δv_0 . При $t \gg (k\delta v_0)^{-1}$ отдельные псевдоволны из этого набора сдвигаются на расстояние, сравнимое с длиной волны модуляции, и поэтому возмущение должно затухнуть. Время затухания по порядку, очевидно, равно $\nu^{-1/3}(kv_0)^{-2/3}$, причем закон затухания имеет вид $\sim \exp(-\nu(kv_0)^{2/3}t)$ [42, 13]. Затухание более резкое, чем по простому экспоненциальному закону $\exp(-\nu t)$, отличает псевдоволны от собственных колебаний сплошной среды. Оно свидетельствует о крайней неустойчивости псевдоволн, «рассыпающихся» в результате слабых внешних воздействий. Аналогичным образом затухают и псевдоволны в жидкости под действием вязкости

1.9.2. Эволюция возмущений в идеальной жидкости. Поведение малых возмущений в течениях обычной жидкости полностью описывается временным уравнением, получающимся из уравнения Орра — Зоммерфельда заменой $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$. Если временно преобразовать по Лапласу, то придем к уравнению Орра — Зоммерфельда с правой частью, учитывающей действие источников возмущений:

$$-i\nu\Delta^2\psi_1 + (\omega - kV_0)\Delta\psi_1 + kV''_0\psi_1 = i\Delta\psi_1(x) |_{t=0}. \quad (1.46)$$

Рассмотрим элементарное возмущение, вызываемое источником в виде δ -функции: $i\Delta\psi_1(x) |_{t=0} = \delta(x - x_0)$. Ясно, что совокупность таких источников составляет полную систему. Пространственная зависимость рассматриваемого элементарного возмущения описывается функцией Грина:

$$G_\omega(x, x_0) = -\frac{i}{\nu W_\omega^{(1,2,3,4)}} \begin{cases} \psi_\omega^{(1)}(x) W_\omega^{(2,3,4)}(x_0) + \psi_\omega^{(3)}(x) W_\omega^{(1,2,4)}(x_0), & x > x_0; \\ \psi_\omega^{(2)}(x) W_\omega^{(1,3,4)}(x_0) + \psi_\omega^{(4)}(x) W_\omega^{(1,2,3)}(x_0), & x < x_0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Здесь $\psi_{\omega}^{(i)}(x)$ — линейно независимые решения уравнения Орра — Зоммерфельда. Функция Грина должна удовлетворять условиям $G(x) = G'(x) = 0$ на обеих границах течения $x = x_1, x_2$. Если значение частоты таково, что резонансная точка расположена на достаточном удалении от границы $\delta x \gg \delta x_S \approx (\nu / (kV_0))^{1/3}$ (этот случай рассматривается ниже), то в качестве двух первых решений $\psi_{\omega}^{(1,2)}(x)$ удобно выбрать крупномасштабные «невязкие» решения, приближенно удовлетворяющие уравнению Рэлея (см. приложение П.2). С точностью до величин порядка ν $\psi_{\omega}^{(1)}(x_2) = 0, \psi_{\omega}^{(2)}(x_1) = 0$. При этом два других решения, $\psi_{\omega}^{(3,4)}(x)$, будут «существенно вязкими» — мелкомасштабными.

В (1.46) $W_{\omega}^{(i,k,l)}(x)$ — функциональные определители $W(\psi_{\omega}^{(i)}(x), \psi_{\omega}^{(k)}(x), \psi_{\omega}^{(l)}(x))$. Отметим, что для уравнения Орра — Зоммерфельда определитель $W_{\omega}^{(1,2,3,4)} = W(\psi_{\omega}^{(1)}(x), \dots, \psi_{\omega}^{(4)}(x))$ не зависит от координаты x . Для определения временной зависимости возмущения необходимо произвести обратное преобразование Лапласа:

$$\psi_{x_0}(x, t) = \int_{-\infty + i\delta}^{+\infty + i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) G_{\omega}(x, x_0). \quad (1.48)$$

С увеличением времени период осцилляций экспоненты $\exp(i\omega t)$ на контуре интегрирования в (1.47) уменьшается $\delta\omega \sim \sim 1/t$. Для того чтобы результат интегрирования не был пренебрежимо (экспоненциально) мал, функция Грина, рассматриваемая как функция частоты, должна иметь характерный интервал изменения $\delta\omega_G \leq 1/t$. В окрестности особенностей функции Грина, если такие имеются, $\delta\omega_G \rightarrow 0$. Поэтому далекая асимптотика $\psi_{x_0}(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется особенностями функции Грина. Поскольку уравнение Орра — Зоммерфельда регулярно, функция Грина имеет особенности, лишь если уравнение Орра — Зоммерфельда обладает собственными функциями. (При собственных значениях частоты функциональный определитель $W^{(1,2,3,4)}$ обращается в нуль). Однако выше показано, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба отсутствуют незатухающие собственные колебания, а также некоторый класс затухающих колебаний, причем это явление обусловлено сингулярным характером «укороченного» уравнения Рэлея.

Использование уравнения Рэлея законно при рассмотрении больших пространственных интервалов, значительно превышающих размер вязкого слоя $\delta x_S \approx (\nu / (kV_0))^{1/3}$, окружающего резонансную точку. В ее окрестности определяющей является зависимость решения от сочетания $\omega - kV_0$. Поэтому любому пространственному интервалу может быть поставлен в соответствие частотный, в частности, $\delta x_S \rightarrow \delta\omega_S \approx \nu^{1/3} (kV_0')^{2/3}$. Эти соображения показывают, что при $t \ll \delta\omega_S^{-1}$ для описания эволюции возмущений можно не учитывать вязкость жидкости. Действительно, на достаточно больших расстояниях от резонансной точки $|x - x_S| \gg \delta x_S$ в выражении для функции Грина можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными быстро спадающим от x_S решениям $\psi_{\omega}^{(3,4)}(x)$.

Используя условия $\left| \frac{d^n}{dx^n} \psi_\omega^{(3,4)}(x) \right| \gg \left| \frac{d^n}{dx^n} \psi_\omega^{(1,2)}(x) \right|$, представим детерминанты, стоящие при $\psi_\omega^{(1)}(x)$, $\psi_\omega^{(2)}(x)$, в приближенном виде $\psi_\omega^{(2)}(x_0) W(\psi_\omega^{(3)'}(x_0), \psi_\omega^{(4)'}(x_0))$ и $\psi_\omega^{(1)}(x_0) W(\psi_\omega^{(3)'}(x_0), \psi_\omega^{(4)'}(x_0))$ соответственно. Аналогичным образом получаем $W_\omega^{(1,2,3,4)} \approx W(\psi_\omega^{(1)}(x_0), \psi_\omega^{(2)}(x_0)) W(\psi_\omega^{(3)'}(x_0), \psi_\omega^{(4)'}(x_0))$. В результате этих преобразований функцию Грина приводим к следующему виду:

$$G_\omega(x, x_0) = (\omega - kV_0)^{-1} g_\omega(x, x_0), \quad (1.49)$$

где $g_\omega(x, x_0)$ — функция Грина уравнения Рэлея (1.4):

$$g_\omega(x, x_0) = \frac{1}{W_\omega^{(1,2)}} \begin{cases} \psi_\omega^{(1)}(x) \psi_\omega^{(2)}(x_0), & x > x_0; \\ \psi_\omega^{(2)}(x) \psi_\omega^{(1)}(x_0), & x < x_0. \end{cases} \quad (1.50)$$

Последнее выражение использовалось в [43, 44], где впервые производился анализ эволюции начальных возмущений в течениях идеальной жидкости.

В окрестности резонансной точки решения $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ можно представить в виде [см. (1.11), (1.12)]:

$$\psi_\omega^{(1,2)}(x) \approx 1 + A(x - x_S) \ln(x - x_S) + B^{(1,2)}(x - x_S) + \dots$$

Здесь x_S определяется резонансным условием $\omega = kV_0(x_S)$ и, следовательно, является функцией частоты. При значениях x_S , близких к x , $x_S \approx x + (\omega - kV_0(x)) / (kV_0')$. Таким образом, выражение (1.49), рассматриваемое как функция частоты, имеет особенности при $\omega = kV_0(x_0)$ и $\omega = kV_0(x)$, которые и определяют вид асимптотики:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) \approx & - \exp(-ikV_0(x_0)t) g_{kV_0(x_0)}(x, x_0) - \\ & - \frac{A}{(kV_0't)^2} \exp(-ikV_0(x)t) \frac{1}{(x - x_0)} g_{kV_0(x)}(x, x_0). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Из (1.51) следует, что начальное возмущение, локализованное в точке x_0 , возбуждает в точке x два волновых процесса с частотами $\omega = kV_0(x_0)$, $\omega = kV_0(x)$ соответственно. Волновой процесс первого типа представляет собой колебания, вызываемые струйкой жидкости, бегущей по Oy с локальной скоростью течения $V_0(x_0)$. Появление в асимптотике волнового процесса второго типа в определенной степени связано с ее вычислением методом преобразования Лапласа [45]. При его использовании предполагается, что начальные возмущения возникают мгновенно в момент времени $t=0$. Поскольку разложение в интеграл Фурье ступенчатой функции времени содержит все частоты, при внезапном возникновении возмущения должен возбуждаться весь спектр частот рассматриваемой системы. Однако в точке x возмущения с частотами $\omega \neq kV_0(x)$ взаимно уничтожаются из-за интерференции. Для того чтобы стала заметной разность между частотами, разделенными

интервалом $\Delta\omega$, необходимо время $t \geq 1/\Delta\omega$. Поэтому чем больше время t , тем уже интервал спектра, который дает вклад во второе слагаемое в (1.50). С этим обстоятельством связано его степенное затухание.

Возмущение, описываемое (1.51), обусловлено наличием сингулярности в уравнении Рэлея. Таким образом, сингулярность, приводя к устранению незатухающих собственных колебаний, порождает колебания нового типа. По аналогии со случаем плазмы они могут быть названы псевдоволнами. Действительно, эти колебания образуют непрерывный спектр ($\omega = kV_0(x)$), а их затухание под действием слабой диссипации происходит по закону $\exp(-Ct^3)$ (см. ниже).

Отдельная псевдоволна вызывается начальным возмущением ротора скорости жидкости в виде δ -функции: $C(x) = \int dx_0 \delta(x - x_0) C(x_0)$ [см. правую часть неоднородного уравнения Орра — Зоммерфельда (1.46)]. Очевидно, что произвольное начальное возмущение можно представить в виде набора псевдоволн.

Временная асимптотика начального возмущения дается интегралом от (1.51) по dx_0 с весом $C(x_0)$. [Функцию $C(x_0)$ будем считать гладкой.] Интеграл от первого слагаемого вычисляется двойным интегрированием по частям с использованием определения функции Грина (1.51). Учитывая при вычислении интеграла от второго слагаемого правило обхода Ландау, находим, что он дает некоторую конечную функцию координаты x . В результате окончательно получаем:

$$\psi(x, t) \sim (kV_0 t)^{-2} \exp\{-ikV_0(x)t\} (\Delta\psi(x)|_{t=0} + F(\Delta\psi(x)|_{t=0})), \quad (1.52)$$

где F — линейный функционал от начального возмущения.

Выражение (1.52) показывает, что в течениях идеальной жидкости плавные начальные возмущения затухают крайне медленно — по степенному закону. Этот закон затухания был обнаружен в [43, 44].

1.9.3. Эволюция возмущений в вязкой жидкости. Из выражения (1.52) также следует, что возмущения распространяются вдоль течения с его локальной скоростью $V_0(x)$. Поэтому разность фаз возмущений, расположенных на различных линиях тока, должна со временем возрастать, и, следовательно, возмущение, бывшее при $t=0$ гладким, с ростом времени должно становиться все более изрезанным по координате x . Как бы ни была мала вязкость жидкости, наступит момент, когда она станет существенной.

С формальной точки зрения необходимость учета вязкости следует из того, что, как было отмечено выше, с ростом времени выявляются эффекты, обусловленные все более мелкими частотными ($\delta\omega \sim 1/t$) и пространственными ($\delta x \sim 1/(kV_0 t)$) масштабами. При $\delta x \leq \delta x_S$ должна проявиться тонкая структура вязкого слоя, окружающего резонансную точку. Для столь больших времен замена регулярного уравнения Орра — Зоммерфельда сингулярным урав-

нением Рэлея станет некорректной. Исчезновение сингулярности в выражении для функции Грина повлечет за собой изменение закона затухания, который должен стать значительно более резким.

Поскольку подынтегральное выражение в (1.48) аналитично, его асимптотика при $t \rightarrow \infty$ определяется точками перевала. С увеличением времени точка перевала перемещается по плоскости комплексного переменного в направлении уменьшения характерного частотного масштаба функции Грина $\delta\omega \sim 1/t$. Как следует из выражений для $\psi_{\omega}^{(i)}(x)$, полученных в приложении П.2, она удаляется от резонансного значения частоты $\omega_S = kV_0(x)$. При $t \gg \gg t_S \sim \nu^{-1/3} (kV'_0)^{-2/3}$ точка перевала находится в области, где для функций $\psi_{\omega}^{(3,4)}(x)$ справедливы приближенные представления вида (П.2.6). Их использование значительно облегчает расчет асимптотики интеграла (1.48). Нетрудно видеть, что составляющие функции Грина, пропорциональные $\psi_{\omega}^{(3,4)}(x)$, не дают вклада в асимптотику. Действительно, в области больших отрицательных значений $\text{Im } \omega$ эти слагаемые меняются гораздо медленнее экспоненты $\exp(-i\omega t)$, и, следовательно, соответствующие интегралы по $d\omega$ пренебрежимо малы. Оставляя в (1.47) слагаемые, пропорциональные $\psi_{\omega}^{(1,2)}(x)$, и используя для функций $\psi_{\omega}^{(3,4)}(x)$ представления (П.2.6), приводим (1.47) к виду (1.49). Однако в последнем выражении функции $\psi_{\omega}^{(1,2)}(x)$ [но не $\psi_{\omega}^{(1,2)}(x_0)$] уже нельзя считать медленно меняющимися — невязкими. Учитывая изменение характера решения в секторе $-\pi/6 < \arg(\omega - \omega_S) < -\pi/6$ (см. приложение П.2), приводим асимптотику интеграла (1.48) к виду

$$\psi_{x_0}(x, t) \approx -2\pi C(x, x_0) \frac{V_0''}{\nu k^3 (V_0' t)^4} \exp \left\{ -\frac{1}{3} \nu (kV_0')^2 t^3 \right\},$$

где

$$C(x, x_0) = \frac{1}{W_{kV_0(x)}^{(1,2)}} \begin{cases} \psi_{kV_0(x)}^{(2)}(x_0), & x > x_0; \\ \psi_{kV_0(x)}^{(1)}(x_0), & x < x_0. \end{cases}$$

Закон затухания элементарных возмущений в течениях обычной жидкости, описываемых функцией Грина (1.47), оказался таким же, как и закон затухания псевдоволн в плазме. Это сходство отражает сходство механизмов затухания. Действительно, вязкость вызывает диффузионное расплывание возмущения ротора скорости по $0x$, а сдвиговое движение по $0y$ приводит к расфазировке составляющих возмущения, расположенных на соседних линиях тока. Возмущение затухнет, когда разность фаз достигает значений π .

1.10. Резонансная раскачка гравитационных волн

До сих пор мы рассматривали колебания течений, ограниченных жесткими стенками. В течениях со свободной границей в присутствии силы тяжести возникают колебания нового типа — гравитационные волны. Из-за наличия свободной границы для грави-

тационных волн теорема Рэлея несправедлива. Ниже будет показано, что гравитационные волны могут оказаться неустойчивыми, даже если профиль скорости течения идеальной жидкости не имеет точек перегиба.

Рассмотрим сначала гравитационные волны в покоящейся жидкости. Введем ускорение силы тяжести $\mathbf{g} = -x^0 \mathbf{g}$ ($\mathbf{g} = \text{const}$) в правую часть уравнения движения:

$$d\mathbf{V}/dt = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (1.53)$$

Пусть уровень $x=0$ соответствует невозмущенной поверхности жидкости. При ее волнении возмущение давления на уровне $x=0$ в линейном приближении равно

$$p_1(0) = \rho g x_1(0),$$

где $x_1(0) = iVx_1(0)/\omega = -(k/\omega)\psi_1(0)$ — вертикальное смещение поверхности жидкости в колебаниях. С другой стороны, из y -компонента линеаризованного уравнения движения находим $p_1 = -(\omega/k)\rho\psi'_1$. Следовательно, при $x=0$ должно выполняться соотношение

$$\psi'_1(0) - g(k/\omega)^2\psi_1(0) = 0. \quad (1.54)$$

В полупространстве ($x < 0$), занятом жидкостью, возмущение функции тока удовлетворяет уравнению (1.4), из которого при $V_0(x) \equiv 0$ получаем $\psi_1 = \exp(|k|x)$. Это решение описывает волну, локализованную у поверхности. Чтобы удовлетворить граничному условию (1.54), частота колебаний должна быть равна $\omega = (g|k|)^{1/2}$.

Учтем теперь движение жидкости. В реальных течениях скорость жидкости относительно дна возрастает по направлению к поверхности. При рассмотрении гравитационных (поверхностных) волн естественно использовать систему отсчета, связанную с поверхностью жидкости. В этой системе скорость течения отрицательна и возрастает по модулю в глубь жидкости. Поскольку нас интересуют резонансные эффекты, рассмотрим колебания с $k < 0$, фазовая скорость которых так же, как и скорость жидкости, отрицательна. Предположим, что выполняются условия $|gk|^{1/2} \gg |V'_0| \gg |V''_0/k|$. В этом случае влияние движения жидкости на колебания может быть проанализировано в рамках метода последовательных приближений. Рассмотрим соотношение (1.6), положив в нем $x_2 = 0$, $x_1 = -\infty$. Используя (1.54), выразим $\psi'_1(0)$ через $\psi_1(0)$, считая частоту комплексной. При вычислении правой части (1.6) воспользуемся соотношением

$$\frac{\text{Im } \omega}{|\omega - kV_0(x)|^2} \xrightarrow{\text{Im } \omega \rightarrow 0} \pi \delta(\omega - kV_0(x)).$$

В результате получаем следующее выражение для $\text{Im } \omega$:

$$\text{Im } \omega = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega V_0''(x_S)}{k |V_0'(x_S)|} \left| \frac{\psi_1(x_S)}{\psi_1(0)} \right|^2, \quad (1.55)$$

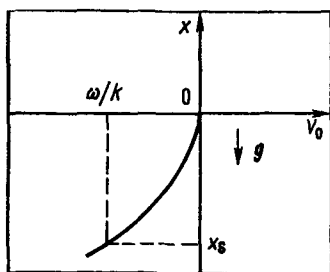


Рис. 1.21. Профиль скорости течения, в котором раскачиваются гравитационные волны

где $\psi_1(x_S)/\psi_1(0) \approx \exp(-|kx_S|)$; x_S — как и раньше, точка резонанса, в которой фазовая скорость гравитационных волн ($\omega = |g/k|^{1/2}$) совпадает со скоростью течения.

Пример неустойчивого профиля скорости приведен на рис. 1.21. При сравнении «чисел резонансных частиц», обгоняющих волну и отстающих от нее, следует учесть, что в принятой системе отсчета как скорость течения, так и фазовая скорость колебаний отрицательны [$V_0(x)$, $\omega/k < 0$]. Поэтому «обгоняющие частицы» на рис.

1.21 расположены ниже точки x_S . С учетом этого обстоятельства для величины df_0/dV_0 , характеризующей соотношение между числом «обгоняющих» и «отстающих» частиц, следует использовать выражение $df_0/dV_0 = -\text{sgn } V_0 V''_0 / (V'_0)^3$. (Напомним, что жидкость считается однородной, $\rho_0 \equiv \text{const.}$) Резонансная раскачка гравитационных волн в течении идеальной жидкости конечной глубины h рассматривалась в [46]. Анализ колебаний с не слишком большими значениями k ($k \leq h^{-1}$) показал, что они раскачиваются при превышении числом Фруда ($\text{Fr} = \Delta V_0 / (gh)^{1/2}$, ΔV_0 — перепад скорости в течении) некоторого критического значения $\text{Fr}_{\text{cr}} \approx 0,68$. Этот результат вполне естествен. Действительно, при малых значениях k фазовая скорость колебаний по соображениям размерности должна быть по порядку равна $(gh)^{1/2}$. Для того чтобы выполнялось условие резонанса, перепад скорости должен быть не меньше $(gh)^{1/2}$. Резонансные эффекты проявляются особенно четко при малой вязкости жидкости ($\text{Re} \gg 1$), когда для описания колебаний можно использовать уравнение Рэлея, дополненное правилом обхода Ландау резонансной точки. (Именно так рассматривалась неустойчивость гравитационных волн в [46].) При малых числах Рейнольдса и больших длинах волн по Oy резонансный слой «расплывается» на все течение $\delta x_S/h \sim (kh \text{Re})^{-1/3}$. Этот случай анализировался в [47, 48].

Рассмотрим теперь раскачку гравитационных волн ветром (см. [3, с. 98; 49]). Предположим, что над водной поверхностью, т. е. в области $x > 0$, воздух движется вдоль Oy со скоростью $V_0(x)$. Воду будем считать покоящейся. При рассмотрении медленных колебаний с фазовой скоростью, много меньшей звуковой, можно пренебречь сжимаемостью воздуха. Считая также воздух однородным, невесомым и невязким ($\text{Re} \gg 1$), будем описывать его колебания уравнением Рэлея.

Установим условия шивки решений на границе раздела вода—воздух. Поскольку смещения частиц воздуха и воды на границе одинаковы, то $\psi_{1+}(0) = \psi_{1-}(0) = \psi_1(0)$; здесь и ниже знаком «+» отмечаются величины, характеризующие состояние воздуха, «—» —

воды. Из y -компонента уравнения движения воздуха находим:

$$p_{1+}(0) = \rho_+ \{ [-(\omega/k) + V_0(0)] \psi'_{1+}(0) - V'_0(0) \psi_1(0) \}.$$

По другую сторону границы раздела возмущение давления

$$p_{1-}(0) = p_{1+}(0) - \rho_- g(k/\omega) \psi_1(0).$$

Учитывая, что в жидкости $p_{1-}(0) = -(\omega/k) \rho_- \psi'_{1-}(0) = -\omega \rho_- \psi_1(0)$ (см. выше), окончательно получаем:

$$\psi'_{1+}(0) = k \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \left(1 - \frac{gk}{\omega^2} \right) \frac{\omega}{\omega - kV_0(0)} + \frac{V'_0(0)}{\omega - kV_0(0)} \right) \psi_1(0).$$

Поскольку $\rho_- \gg \rho_+$, в этом соотношении можно пренебречь вторым слагаемым в скобках.

Частота гравитационных волн равна $\omega = (gk)^{1/2}$. В результате резонансного взаимодействия с ветром у частоты может появиться малая мнимая часть. Для определения $\text{Im } \omega$ используем соотношение (1.6), в котором положим $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$. Действуя затем так же, как и в первой части настоящего параграфа, получаем [49]:

$$\text{Im } \omega = - \frac{\rho_+}{\rho_-} \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{k} \frac{V_0''(x_S)}{|V_0'(x_S)|^3} \left| \frac{\psi_1(x_S)}{\psi_0(0)} \right|^2. \quad (1.56)$$

Полученное выражение отличается от (1.55) лишь множителем ρ_+/ρ_- , который отражает меньшую эффективность раскочки «тяжелой» жидкости «легким» воздухом.

В заключение проанализируем процесс раскочки гравитационных волн стратифицированным потоком воздуха, т. е. потоком, в котором не только скорость, но и плотность воздуха меняется с высотой. Дифференциальное уравнение, описывающее колебания такого течения, нетрудно получить из линеаризованных уравнений движения (1.1) и непрерывности. В приближении несжимаемости воздуха оно имеет вид (см., например, [6, 8]):

$$(\rho_{+0} \psi_1)' - k^2 \rho_{+0} \psi_1 + \frac{(\rho_{+0} k V_0)'}{(\omega - k V_0)} \psi_1 - \frac{\xi k^2 \rho'_{+0}}{(\omega - k V_0)^2} \psi_1 = 0.$$

Из этого уравнения получаем [ср. с (1.43)]:

$$\frac{d\tilde{W}}{dx} = \text{Im } \omega k^2 \left(\frac{(\rho_{+0} V_0)'}{|\omega - k V_0|^2} - \frac{2\xi k \rho'_{+0} (\text{Re } \omega - k V_0)}{|\omega - k V_0|^4} \right) |\psi_1|^2. \quad (1.57)$$

При интегрировании (1.57) воспользуемся соотношением

$$\text{Im } \frac{1}{(\omega - k V_0)^2} = - \frac{d}{d\omega} \text{Im } \frac{1}{(\omega - k V_0)} = - \frac{\pi}{k V_0'} \frac{d}{dx} \delta(\omega - k V_0).$$

В результате при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$ получаем:

$$\tilde{W} \Big|_{x_1}^{x_2} = \pi k \left(\frac{1}{V_0'} (\rho_{+0} V_0)' + \frac{g}{V_0'} \left(\frac{\rho'_{+0}}{V_0'} \right)' \right)_{x=x_S} |\psi_1(x_S)|^2. \quad (1.58)$$

Инкремент ветровой неустойчивости, рассчитанный с помощью (1.58), равен [ср. с (1.55), (1.56)]:

$$\text{Im } \omega = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho_-} \frac{\omega}{k} \left(\frac{(\rho_{+0} V_0')'}{V_0'} + \frac{g}{V_0'} \left(\frac{\rho'_{+0}}{V_0'} \right)' \right)_{x=x_S} \left| \frac{\psi_1(x_S)^2}{\psi_1(0)} \right|^2. \quad (1.59)$$

Первое слагаемое в скобках описывает эффект раскачки (затухания) колебаний за счет изменения кинетической энергии резонансного слоя жидкости. Однако колебания изменяют не только скорость, но и положение частиц жидкости. При наличии гравитационного поля смещения частиц по Ox , приводящие к изменению потенциальной энергии, также влияют на динамику развития колебаний. Это влияние учитывается вторым слагаемым в скобках в (1.59). Оно может быть представлено в виде $gd^2\rho_{+0}/dV_0^2$. Попробуем понять физический смысл данного выражения. С этой целью обратимся еще раз к картине движения в окрестности резонансной точки x_S . Предположим сначала для простоты, что в этой области невозмущенная скорость воздуха $V_0(x)$ меняется по линейному закону ($d^2\rho_{+0}/dV_0^2 \propto d^2\rho_{+0}/dx^2$).

В рассматриваемых возмущениях ускорение воздуха под действием колебаний периодически по Oy . Используя уравнение движения (1.53) с учетом предполагавшейся выше несжимаемости воздуха, приходим к картине течения, изображенной на рис. 1.22. Здесь принята система отсчета, в которой волна покоится. Рис. 1.22 показывает, что плотность воздуха в резонансном слое определяется соотношением

$$\rho_+(x_S, y, t) = (1/2) \{ \rho_{+0} [x_S + \Delta(x_S, y, t)] + \rho_{+0}(x_S - \Delta(x_S, y, t)) \} \approx \approx \rho_{+0}(x_S) + (1/2) \rho''_{+0}(x_S) \Delta^2(x_S, y, t), \quad (1.60)$$

где $\Delta(x, y, t)$ — смещение частиц воздуха по Ox .

Из выражения (1.60) следует, что плотность воздуха в резонансном слое возрастает, если $\rho''_{+0}(x_S) > 0$, и убывает при $\rho''_{+0}(x_S) < 0$. Точно так же меняется и потенциальная энергия резонансного слоя $U = \rho_+ g x_S$. Гравитационный потенциал отсчитывает-

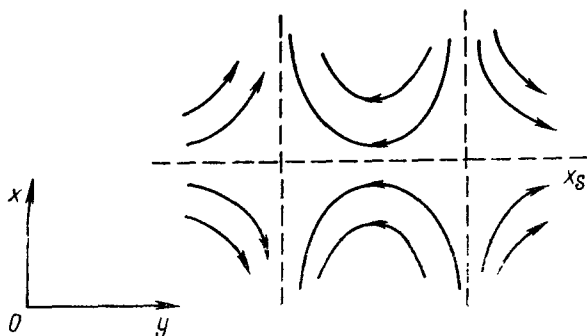


Рис. 1.22. Картина течения в окрестности резонансной точки x_S при малой амплитуде колебаний

ся от поверхности раздела воздух—вода, вблизи которой локализована основная часть энергии рассматриваемой гравитационной волны. Учитывая сохранение полной энергии системы: воздух в резонансном слое — волна, приходим к заключению, что в соответствии с (1.59) резонансные эффекты должны стабилизировать течение при $\rho''_{+0}(x_S) > 0$ и дестабилизировать при $\rho''_{+0}(x_S) < 0$.

Выше считалось $V'_0(x) = \text{const}$. С этим обстоятельством связана симметрия течения, изображенного на рис. 1.22 относительно уровня $x = x_S$, а следовательно, и вид соотношения (1.60). При $V'_0(x) \neq \text{const}$ картина течения становится несимметричной. Однако симметрия восстанавливается, если вместо координаты x по вертикальной оси отсчитывать $V_0(x)$ (см. также п. 1.6.3). Эти соображения объясняют наличие производных d/dV_0 в величине $gd^2\rho_{+0}/dV_0^2$, определяющей устойчивость гравитационных волн.

1.11. Резонансное взаимодействие в течениях сжимаемой жидкости

Уравнение (1.2) показывает, что при колебаниях несжимаемой жидкости осциллирует локальное значение $(\text{rot } \mathbf{V})_z$, причем осцилляции обусловлены смещениями самой жидкости. Такие колебания, очевидно, возможны лишь в неоднородных течениях, где $(\text{rot } \mathbf{V}_0)_z$ меняется в направлении поперек течения. При учете сжимаемости жидкости появляется еще одна ветвь колебаний — звуковая, которая для своего существования не требует неоднородности среды. В неоднородных течениях звуковые колебания в отличие от «колебаний ротора скорости» могут уходить от резонансной точки x_S на бесконечное расстояние (ср. с § 1.3). Последнее обстоятельство позволяет характеризовать резонансное взаимодействие коэффициентом прохождения колебаний через резонансную точку T и коэффициентом отражения R , определяя их из асимптотических представлений решений, справедливых при $x - x_S \rightarrow \pm\infty$. Если $T + R > 1$, то естественно говорить об усилении колебаний при резонансном взаимодействии, а если $T + R < 1$ — об их ослаблении. Отметим, что поскольку знак энергии колебаний меняется при прохождении через резонансную точку, усиление (ослабление) колебаний не означает автоматически, что их энергия возрастает (уменьшается, см. ниже). Очевидно, что если течение ограничить стенками, отражающими колебания, то в режиме усиления в нем разовьется неустойчивость.

Покажем, следуя [50], что в случае простейшего линейного профиля скорости течения сжимаемой жидкости резонансное взаимодействие сопровождается усилением колебаний. Будем описывать колебания уравнением движения (1.1), уравнением неразрывности

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$$

и уравнением состояния

$$\rho\rho^{-\gamma} = \text{const}.$$

Линеаризуя эту систему в предположении $V_0 = (0, V_0(x), 0)$, $\rho_0 = \text{const}$, получаем следующее уравнение, определяющее пространственную структуру малых колебаний:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(\omega - kV_0)^2} \frac{dp_1}{dx} \right) - \frac{k^2}{(\omega - kV_0)^2} p_1 + \frac{1}{c_s^2} p_1 = 0. \quad (1.61)$$

Здесь $c_s = (dp/d\rho)^{1/2}$ — скорость звука; возмущение давления выбрано в виде $p_1(r, t) = p_1(x) \exp(-i\omega t +iky)$. Оно связано с возмущением функции тока ψ_1 соотношением $\psi_1 = -\frac{1}{(\omega - kV_0)} \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dx}$.

На больших расстояниях от резонансной точки решения (1.61) могут быть представлены в квазиклассическом виде, и звуковые колебания принимают вид волн, бегущих по $0x$, $p_1(x) \sim$

$\exp \left[\pm (i/c_s) \int (\omega - kV_0) dx \right]$. В окрестности резонансной точки, где квазиклассическое приближение нарушается, колебания обмениваются энергией с течением, что приводит к изменению их амплитуды. В этой области может также возникнуть отраженная волна. Задача состоит в определении коэффициента отражения \mathcal{R} и коэффициента прохождения \mathcal{T} .

Отметим, что, поскольку в движущейся среде направления фазовой и групповой скоростей не совпадают, при идентификации падающей, прошедшей и отраженной волн могут возникнуть недоразумения. Так, в рассматриваемом случае в области, где $V_0(x) > \omega/k$, сигнал распространяется по $0x$ навстречу соответствующей проекции фазовой скорости. Действительно, в квазиклассическом приближении из (1.61) получаем дисперсионное соотношение

$$(\omega - kV_0)^2 = c_s^2(k^2 + kx^2),$$

откуда следует

$$d\omega/dkx = c_s^2 kx / (\omega - kV_0). \quad (1.62)$$

Будем считать профиль скорости линейным, $V_0(x) = V_0(0) + xV_0'$ (куэттовское течение). Перейдем в систему отсчета, в которой волна покоится, $\omega/k = V_0(0) = 0$, введем новую переменную $\xi = -iak^2x^2$, где $a = V_0'/(kc_s)$, и новую неизвестную функцию $\chi = \xi^{-3/2} \exp(\xi/2) p_1$. В результате уравнение (1.61) принимает вид

$$\xi \chi'' + \left(\frac{5}{2} - \xi \right) \chi' - \left(\frac{5}{4} + \frac{i}{4a} \right) \chi = 0.$$

Его решения выражаются через вырожденные гипергеометрические функции [52]:

$$\chi = C_1 U \left(\frac{5}{4} + \frac{i}{4a}, \frac{5}{2}, \xi \right) + C_2 M \left(\frac{5}{4} + \frac{i}{4a}, \frac{5}{2}, \xi \right). \quad (1.63)$$

Асимптотические представления функций U , M при $x \rightarrow \infty$ имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U(b, 5/2, \xi) &\approx \xi^{-b}; \\ M\left(b, \frac{5}{2}, \xi\right) &\approx \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2 - b)} \exp(-i\pi b) \xi^{-b} + \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(b)} \exp(\xi) \xi^{b-5/2}; \end{aligned} \right\} (1.64)$$

где $b = 5/4 + i/(4a)$.

Продолжая решение из области $x \rightarrow \infty$ в область $x \rightarrow -\infty$, в соответствии с правилом обхода Ландау будем обходить резонансную точку $x=0$ в нижней полуплоскости, где $\arg x$ меняется от 0 до $-\pi$ и соответственно $\arg \xi$ от $-\pi/2$ до $-5\pi/2$. При таком переходе аналитическая в нуле функция M не меняется, $M(b, 5/2, \xi \exp(-2\pi i)) = M(b, 5/2, \xi)$, а для функции U выполняется соотношение [51]:

$$\begin{aligned} U\left[b, \frac{5}{2}, \xi \exp(-2\pi i)\right] &= -U\left(b, \frac{5}{2}, \xi\right) + \\ &+ \frac{2\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-3/2 + b)} M\left(b, \frac{5}{2}, \xi\right). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Учитывая соотношения (1.63), (1.65), а также приведенные выше соображения относительно отождествления квазиклассических асимптотик с падающей, прошедшей и отраженной волнами, нетрудно найти, что решение, описывающее волну, падающую слева, имеет вид

$$\chi = \begin{cases} -\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2 - b)} \exp(i\pi b) U + M, & x > 0; \\ \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2 - b)} \exp(-i\pi b) U - \exp(-2i\pi b) M, & x < 0. \end{cases} \quad (1.66)$$

Здесь в обоих представлениях $\arg \xi$ следует считать равным $-\pi/2$.

Аналогичным образом для решения, описывающего волну, падающую справа, находим

$$\chi = \begin{cases} U - \frac{2\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-3/2 + b)} M, & x > 0; \\ -U, & x < 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

Полученные выражения позволяют найти коэффициент прохождения звуковых колебаний через резонансную точку T и коэффициент отражения от этой точки R . Рассмотрим волну, падающую слева. Плотность энергии звука в движущейся среде, как нетрудно показать, дается выражением

$$U = \frac{\omega}{\omega - kV_0} \frac{|p_1|^2}{\rho_0 c_s^2}.$$

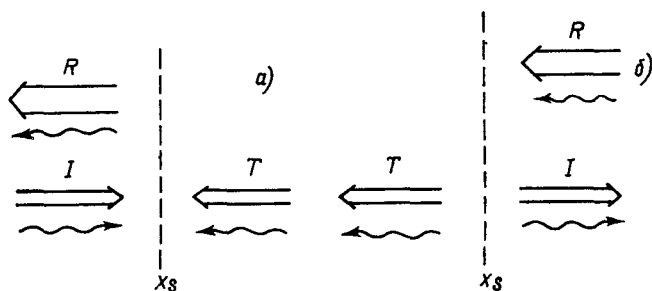


Рис. 1.23. Схема, иллюстрирующая распространение звуковых колебаний через резонансную точку x_s :

волнистые стрелки показывают направление фазовой скорости, толстые — направление потока энергии, а — колебания распространяются слева направо; б — колебания распространяются справа налево

В области, где $V_0 > \omega/k$, энергия звука отрицательна, а поток энергии направлен к резонансной точке ($S_x = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} U < 0$). Используя также (1.66), (1.62) и асимптотические представления для гипергеометрических функций (1.64), (1.65), находим:

$$R = 1 + \exp(-\pi/a); \quad (1.68)$$

$$T = \exp(-\pi/a) \quad (1.69)$$

Здесь $R = -S_x^R/S_x^I$; $T = -S_x^T/S_x^I$, где S_x^I , S_x^R , S_x^T — потоки энергии в падающей, отраженной и прошедшей волнах соответственно; $a = V_0'/(kc_s)$.

Соотношения (1.68), (1.69) показывают, что коэффициент отражения R превышает единицу за счет того, что в прошедшей волне энергия подтекает к резонансной точке $S_x^T < 0$. Баланс энергии при резонансном взаимодействии с течением иллюстрируется рис. 1.23, а.

В области $x > 0$, где распространяется прошедшая волна, энергия колебаний отрицательна. Отрицательный знак энергии колебаний означает, что энергия движения среды уменьшается в присутствии колебаний. Таким образом, в процессе резонансного взаимодействия энергия перекачивается из области $x > 0$ в область $x < 0$, причем в соответствии с (1.68), (1.69) суммарная энергия не меняется. Вывод о постоянстве полной волновой энергии вполне согласуется с механизмом резонансного взаимодействия, обсуждавшимся в § 1.6, 1.7, 1.10. Действительно, при линейном профиле скорости части резонансной зоны $\delta_+ x_s$ и $\delta_- x_s$, в которых течение соответственно обгоняет волну и отстает от нее, равны. Поэтому течение в среднем не может ни ускоряться, ни замедляться. Положение, по-видимому, изменится при $V_0''(x_s) \neq 0$. Однако резонансное взаимодействие в этом случае не исследовано ввиду математических трудностей.

В случае волны, падающей справа, решение волнового уравнения дается (1.67). Анализ этого выражения приводит к тем же

значениям для коэффициентов отражения и прохождения. Рис. 1.23,б иллюстрирует соотношение и направление потоков энергии в этом случае.

Проведенное обсуждение показывает, что резонансный обмен энергией колебаний с течением может принимать вид обмена энергией между колебаниями с разными знаками энергии. Этот процесс происходит также при взаимодействии звуковых колебаний с тангенциальным разрывом. Подробное решение задачи о падении звуковой волны на разрыв и анализ его устойчивости по отношению к возбуждению звуковых колебаний можно найти, например, в [52]. Не повторяя всего рассмотрения, выделим черты, сходные с задачей, рассмотренной выше.

Предположим, что на разрыв скорости $V_0(x) = V_{00} \operatorname{sgn} x$ со стороны отрицательных значений x падает звуковая волна вида $\exp(-i\omega t + ik_x^{(-)}x +iky)$. Пусть выполнено условие $c_s - V_{00} < \omega/k < V_{00} - c_s$. Будем искать решение волнового уравнения (1.61) в виде

$$p_1(x) = \begin{cases} p_{1I} \exp(i k_x^{(-)} x) + p_{1R} \exp(-i k_x^{(-)} x), & x < 0; \\ p_{1T} \exp(-i k_x^{(+)} x), & x > 0. \end{cases}$$

Здесь p_{1I} , p_{1R} , p_{1T} — амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн соответственно. Знаки x компонентов волновых векторов выбраны в соответствии с выражением (1.62) для групповой скорости

$$k_x^{(\pm)} = (k/c_s) ((\omega/k \mp V_{00})^2 - c_s^2)^{1/2}.$$

Из волнового уравнения (1.61) следует, что на разрыве должны быть непрерывны величины p_1 , $(\omega - kV_0(x))^{-2} dp_1/dx$. Используя эти условия, находим: $p_{1R}/p_{1I} = (1+q)/(1-q)$; $p_{1T}/p_{1I} = 2/(1-q)$, где $q = ((\omega + kV_{00})/(\omega - kV_{00}))^2 (k_x^{(+)} / k_x^{(-)})$. Затем с помощью (1.62) и выражения для плотности энергии (см. выше) получаем

$$S_x^I = \frac{c_s^2 k_x^{(-)} \omega}{(\omega + kV_{00})^2} \frac{|p_{1I}|^2}{\rho_0 c_s^2}; \quad R = -\frac{S_x^R}{S_x^I} = \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^2;$$

$$T = -S_x^T / S_x^I = 4q / (1-q)^2.$$

Полученные выражения для коэффициентов отражения и преломления удовлетворяют тому же соотношению $R = 1 + T$, что и (1.68), (1.69). Поскольку и в рассматриваемом случае тангенциального разрыва энергия колебаний отрицательна при $x > 0$ и положительна при $x < 0$, усиление отраженных колебаний так же, как и в куэттовском течении, обусловлено притоком энергии из области $x > 0$. Аналогия с куэттовским течением, разумеется, остается в силе и для колебаний, падающих на тангенциальный разрыв справа.

При падении звуковой волны на тангенциальный разрыв величины R , T могут обращаться в бесконечность для колебаний ω $\text{Im } \omega > 0$. В этом случае говорят о неустойчивости разрыва. В свете сказанного выше ее можно трактовать как спонтанное парное рождение волн с разными знаками энергии [53]. По отношению к рассматриваемым двумерным возмущениям тангенциальный разрыв неустойчив, лишь если $V_{00} < \sqrt{2}c_s$. При $V_{00} > \sqrt{2}c_s$ неустойчивыми оказываются только трехмерные возмущения (см., например, [52]). В то же время, как показано в [54, 55], размытый разрыв неустойчив по отношению к двумерным возмущениям при произвольном перепаде скорости.

2. ЖЕЛОБКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.1. Газ заряженных частиц в магнитном поле

2.1.1. Аналогия с колебаниями течений идеальной жидкости. Аналог теоремы Рэлея. В ряд устройств, используемых в технике и научных исследованиях, в качестве составного элемента входит газ заряженных частиц одного сорта (электроны или ионы), помещенный в магнитное поле. К таким устройствам относятся, например, некоторые СВЧ-приборы, магнитоэлектростатические ловушки, применяемые для удержания термоядерной плазмы, и др. Если магнитное поле достаточно велико, так что ларморовский радиус заряженных частиц мал по сравнению с размером системы, то частицы дрейфуют в скрещенных полях (внешнем магнитном и электрическом, создаваемом собственным зарядом) со скоростью $\mathbf{V} = (c/B^2) [\mathbf{B} \nabla \phi]$ (здесь ϕ — электрический потенциал). Скорость дрейфового движения направлена поперек магнитного поля, и поэтому с ним наиболее интенсивно взаимодействуют колебания, волновой вектор которых также перпендикулярен магнитному полю. В таких колебаниях возмущения плотности заряженных частиц образуют как бы желобки, вытянутые вдоль магнитного поля. Соответственно сами колебания часто называются желобковыми. Анализ устойчивости желобковых колебаний существенно облегчается аналогией с колебаниями течений идеальной жидкости, указанной в [56]. Благодаря этой аналогии теорема Рэлея может быть распространена на желобковые колебания газа заряженных частиц в магнитном поле [56].

Рассмотрим газ заряженных частиц (для определенности электронный газ), помещенный в однородное магнитное поле, направленное по Oz. Будем считать, что плотность электронов не зависит от координаты z. В такой системе электрическое поле колебаний, так же как и начальное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = -\nabla \phi_0$, перпендикулярно магнитному, и выражение $\mathbf{V} = (c/B^2) [\mathbf{B} \nabla \phi]$ можно ис-

пользовать для полной скорости $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1^*$. Дрейфовое движение сходно с движением идеальной несжимаемой жидкости (см. гл. 1), а именно: оно двумерно, $\mathbf{V} \perp \mathbf{B}$, и в случае однородного магнитного поля несжимаемо, причем роль функции тока ψ играет величина $(c/B)\varphi$. В силу условия несжимаемости уравнение непрерывности для электронной плотности приводится к виду $dn/dt = 0$. Используя уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi en,$$

запишем уравнение непрерывности, которое в рассматриваемом случае выражает закон сохранения заряда, в виде

$$\frac{1}{4\pi e} \frac{d}{dt} \Delta\varphi = 0, \quad (2.1)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (c/B^2) ([\mathbf{B}\nabla\varphi] \nabla)$.

Нетрудно видеть, что уравнение (2.1) аналогично (1.2) и, как и последнее, означает, что сохраняется ротор скорости $\text{rot}_z \mathbf{V} = (c/B)\Delta\varphi = 4\pi e c n/B$.

Будем считать, что в начальном состоянии система однородна по Oy ($n_0(\mathbf{r}) = n_0(x)$, $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0(x)$). Соответственно возмущение потенциала в желобковых колебаниях выберем в виде $\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(x) \exp(-i\omega t +iky)$. Линеаризуя (2.1) по возмущению φ_1 , получаем уравнение по виду, совпадающее с уравнением Рэля:

$$\varphi_1'' - k^2 \varphi_1 + \frac{V_0''}{\omega/k - V_0} \varphi_1 = 0, \quad (2.2)$$

где $V_0(x) = (c/B)\varphi_0'(x)$ — скорость дрейфа электронов, направленных по Oy .

В силу отмеченной выше аналогии все результаты, полученные при исследовании колебаний плоскопараллельных течений идеальной несжимаемой жидкости, могут быть перенесены на случай желобковых колебаний газа заряженных частиц. В частности, в соответствии с теоремой Рэля желобковые колебания устойчивы, если профиль скорости дрейфа $V_0(x)$ не имеет точек перегиба. Из уравнения Пуассона следует, что точки перегиба на профиле скорости экстремальны для плотности заряженных частиц $\left(\frac{d^2 V_0}{dx^2} = \frac{c}{B} \frac{d^3 \varphi_0}{dx^3} = \frac{4\pi e c}{B} \frac{dn_0}{dx}\right)$. Поэтому в рассматриваемом случае аналог теоремы Рэля можно сформулировать следующим образом: же-

*При анализе колебаний с $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ это приближение справедливо, если частота колебаний мала по сравнению с циклотронной, $\omega_{ce} = eB/(m_e c)$, а длина волны велика по сравнению с ларморовским радиусом $\rho_e = v_{\perp} / \omega_{ce}$, где v_{\perp} — скорость ларморовского вращения. Рассмотрение показывает, что эти условия выполняются при достаточно низкой плотности заряженных частиц, когда $\omega_{pe} \ll \omega_{ce}$, $\omega_{pe} = (4\pi n_0 e^2 / m_e)^{1/2}$ — электронная плазменная частота.

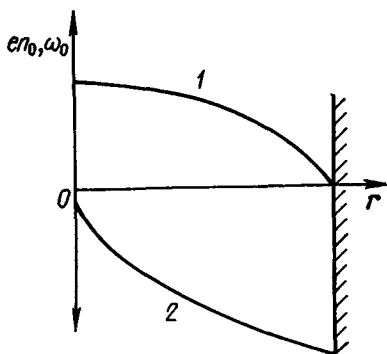


Рис. 2.1. Устойчивое распределение заряда (1) и соответствующее распределение угловой скорости вращения заряженных частиц (2)

лобковые колебания газа заряженных частиц устойчивы, если плотность частиц является монотонной функцией x .

При доказательстве теоремы Рэлея существенно использовалось граничное условие $\varphi_1(x_{1,2}) = 0$, оно означает, что течение ограничено твердыми стенками, на которых нормальный компонент скорости $V_{x1} = \partial\varphi_1/\partial y = ik\varphi_1$ обращается в нуль. В случае желобковых колебаний следует ставить условие $\varphi_1 = 0$, если слой заряженных частиц ограничен идеально проводящими пластинами.

Реальные системы характеризуются чаще не плоской, а аксиальной симметрией. В таких системах плотность заряженных частиц зависит от радиуса, электрическое поле радиально, магнитное поле направлено вдоль оси симметрии, заряженные частицы дрейфуют по азимуту с угловой скоростью $\omega_0(r) = (1/r)(c/B)d\varphi_0/dr$, а желобковые возмущения представляют собой волны, бегущие по азимуту: $\varphi_1(r, t) = \varphi_1(r)\exp(-i\omega t + im\theta)$ (m — азимутальное волновое число). В этом случае линеаризация уравнения (2.1) дает

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \varphi_1 - \frac{4}{\omega_0(r) - \omega/m} \frac{d^2}{d(r^2)^2} (r^2\omega_0) \varphi_1 = 0. \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что в аксиально-симметричном случае величина d^2V_0/dx^2 заменяется на $(4d^2/d(r^2)^2)(r^2\omega_0)$. Последнее выражение в соответствии с уравнением Пуассона равно $(4\pi e c/B) \times (1/r)dn_0/dr$. Поэтому, повторяя рассмотрение, проведенное в § 1.1, приходим к заключению, что в аксиально-симметричном случае желобковые колебания устойчивы, если плотность заряженных частиц меняется по радиусу монотонно. Пример устойчивого распределения заряженных частиц изображен на рис. 2.1.

Критерий устойчивости Рэлея можно также трактовать как условие на ротор скорости невозмущенного течения. Действительно, учитывая соотношение $\text{rot}_z \mathbf{V}_0 = (2d/dr^2)(r^2\omega_0)$, приходим к выводу, что течение устойчиво, если ротор скорости меняется по радиусу монотонно.

Если выполнен критерий Рэлея, то в течениях идеальной жидкости, вообще говоря, отсутствуют не только нарастающие, но и нейтральные колебания. Исключение составляют течения с профилями скорости типа паузейлевского, в которых существуют вырожденные нейтральные колебания (см. п. 1.7.1). Сходные нейтральные колебания имеются и в газе заряженных частиц в магнитном поле. Для их выявления введем в (2.2) новую неизвестную функ-

цию $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 / (r(\omega - m\omega_0(r)))$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^3 (\omega - m\omega_0)^2 \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} \right) + (1 - m^2) (\omega - m\omega_0)^2 \tilde{\varphi}_1 = 0. \quad (2.4)$$

При $m=1$ решением уравнения (2.4) является $\tilde{\varphi}_1 = \text{const}$, т. е. $\varphi_1 = \text{const} \cdot r(\omega - \omega_0(r))$. Последнее выражение удовлетворяет граничному условию на стенке $\varphi_1(r_1) = 0$, если $\omega = \omega_0(r_1)$, т. е. резонансная точка совпадает с граничной. Для анализа устойчивости рассматриваемого решения уравнения (2.3), (2.4) следует регуляризовать учет эффектов конечного ларморовского радиуса заряженных частиц (см. § 2.2).

В заключение заметим, что даже при условии знакопостоянства величины $\frac{d^2}{d(r^2)^2} (r^2 \omega_0)$ для того, чтобы гарантировать устойчивость желобковых колебаний, строго говоря, необходимо дополнительно потребовать монотонности изменения частоты вращения по радиусу, см. замечание в конце § 1.2.

2.1.2. Влияние эффектов конечного ларморовского радиуса. Уравнения (2.2), (2.3) имеют особенность в точке, где скорость дрейфа заряженных частиц в скрещенных полях совпадает с фазовой скоростью колебаний. Уравнение (1.4), описывающее колебания идеальной жидкости и совпадающее по виду с (2.2), регуляризовалось посредством учета вязкости. Вязкость газа заряженных частиц в практически интересных случаях ничтожно мала, более существенны эффекты конечного ларморовского радиуса заряженных частиц. Влияние конечного ларморовского радиуса на плазменные колебания весьма многообразно (см., например, [32]). Для регуляризации уравнения желобковых колебаний достаточно учесть, как под действием эффектов ларморовского радиуса заряженных частиц меняется скорость их начального невозмущенного колебаниями дрейфа.

Вопрос о влиянии эффектов ларморовского радиуса на желобковые колебания разреженной плазмы анализировался в [56] на примере систем с плоской симметрией. Для низкочастотных ($\omega \ll \omega_c$) желобковых колебаний реальное значение имеет скорость дрейфа, усредненная по быстрому ларморовскому вращению $\langle V_0(x) \rangle$. Считая, что характерный масштаб изменения невозмущенного потенциала a велик по сравнению с ларморовским радиусом электронов, с точностью до членов порядка $(\rho_e/a)^2$ получаем

$$\langle V_0 \rangle = \frac{c}{B} \left. \frac{d\varphi_0}{dx} \right|_{x=x_e}, \quad \text{где } x_e \text{ — координата центра ларморовской}$$

окружности. Текущая координата электрона x связана с x_e соотношением $x = x_e - \rho_e \cos \theta_e$, где θ_e — фаза ларморовского вращения, с которой электрон приходит в точку x (рис. 2.2). Из-за конечности ларморовского радиуса в одной и той же точке могут находиться частицы, скорости дрейфа которых различаются на $\sim (c/B)\varphi_0''\rho_e$. В результате резонанс размывается на область раз-

мером $\sim \rho_e$, что, естественно, ведет к регуляризации уравнения желобковых колебаний.

В [56] было получено следующее выражение для возмущения плотности электронов в желобковых колебаниях:

$$n_1 = -i \sqrt{\pi} W(\xi) \frac{dn_0}{dx} \frac{1}{\rho_{eT} \varphi_0''} \varphi_1, \quad (2.5)$$

где $W(\xi)$ — интеграл вероятности от комплексного аргумента; $\xi = (\omega - kV_0(x)) / (kV_0' \rho_{eT})$; $\rho_{eT} = (1/\omega_{ce}) (2T_e/m_e)^{1/2}$; распределение электронов по скоростям считалось максвелловским, для определенности принималось $kV_0'(x_s) > 0$.

Функция $W(\xi)$ имеет следующие асимптотические представления:

$$W(\xi) \approx \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\xi} & \left(-\frac{\pi}{4} < \arg \xi < \frac{5\pi}{4}\right); \\ \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\xi} + 2 \exp(-\xi^2) & \left(-\frac{3\pi}{4} < \arg \xi < -\frac{\pi}{4}\right). \end{cases} \quad (2.6)$$

Используя (2.5), (2.6), находим, что на достаточно большом расстоянии от точки x_s вне сектора $\pi/4 < \arg(x - x_s) < 3\pi/4$, выходящего из этой точки, возмущение плотности электронов дается «гидродинамическим» выражением, в которое переходит (2.5) при $\rho_e = 0$:

$$n_1 = -\frac{kc}{B} \frac{1}{\omega - kV_0} \frac{dn_0}{dx} \varphi_1. \quad (2.7)$$

Для того чтобы получить уравнение, описывающее желобковые колебания, необходимо n_1 подставить в уравнение Пуассона. Если для n_1 использовать выражение (2.7), то придем к уравнению (2.2), рассматривавшемуся в п. 2.1.1. В то же время в секторе $\pi/4 < \arg(x - x_s) < 3\pi/4$ существенную роль играют эффекты конечного ларморовского радиуса электронов, приводящие к значительному усложнению уравнения желобковых колебаний. (Ср. с влиянием вязкости на колебания жидкости). Нетрудно видеть, что можно обойтись без учета эффектов конечного ларморовского радиуса электронов, если при продолжении решения через точку x_s обходить ее по Ландау (рис. 2.3). Использование правила обхода Ландау, как было показано в гл. 1, имеет следствием вывод о поглощении колебаний в точке резонанса. В данном случае колебания поглощаются за счет механизма бесстолкновительного резонансного поглощения, хорошо известного в физике плазмы (см. также § 1.6).

Как мы видели, эффекты конечного ларморовского радиуса заряженных частиц влияют на желобковые колебания так же, как вязкость на колебания жидкости. Это сходство распространяется и на эволюцию начальных возмущений. Рассматривая эволюцию возмущений в газе заряженных частиц, помещенных в магнитном поле, не будем повторять всего анализа, проведенного в § 1.9.

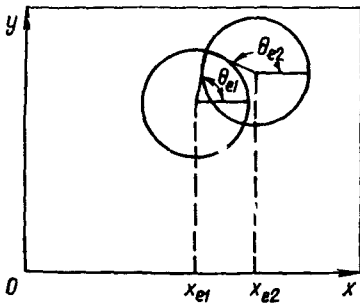


Рис 22. Ларморовские окружности электронов, проходящие через одну точку

x_e — x координаты центров ларморовских окружностей, θ_e — значения фазы ларморовского вращения в точке пересечения окружностей

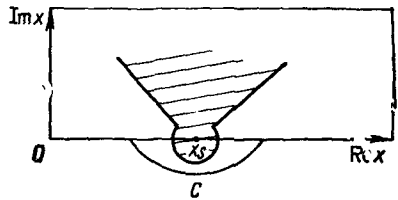


Рис 23. Плоскость комплексного переменного x для уравнения желобковых колебаний газа заряженных частиц при учете эффектов конечного ларморовского радиуса:

область, где необходимо учитывать эти эффекты, заштрихована; x_S — резонансная точка; считается, что $\text{Im } \omega = 0$; C — контур обхода резонансной области по Ландау

Отметим лишь основные моменты. В приближении $\rho_e = 0$ уравнение (2.2), описывающее желобковые колебания, сингулярно, что делает сингулярным подынтегральное выражение в интеграле типа (1.48), а это, в свою очередь, ведет к появлению в асимптотике элементарного начального возмущения слагаемых $\exp[-ikV_0(x_0)t]$, $\exp[-ikV_0(x)t]$. Напомним, что x_0 — точка, где расположен источник возмущения, x — точка наблюдения. Регуляризация уравнения (2.2) за счет эффектов конечного ларморовского радиуса имеет следствием резкое затухание возмущений (быстрее простого экспоненциального). Это наиболее просто показать на примере возмущений первого типа $\exp(-ikV_0(x_0)t)$.

Данная временная зависимость получается при выполнении обратного преобразования Лапласа от резонансного знаменателя $(\omega - kV_0(x))^{-1}$. При учете эффектов конечного ларморовского радиуса резонансный знаменатель заменяется на $i\sqrt{\pi}(B/ck) \times (\rho_e \tau \Phi_0''(x_S))^{-1} W(\xi)$. (Здесь, как и выше, предполагается, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям.) Обратное преобразование Лапласа от $W(\xi)$ дает (см., например, [57]):

$$\int_{-\infty + i\gamma}^{\infty + i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) W(\xi) = 2\sqrt{\pi} k V_0' \rho_{eT} \exp\{-ikV_0(x)t - (1/4)(kV_0' \rho_{eT} t)^2\}. \quad (2.8)$$

Причина затухания возмущений под действием эффектов конечного ларморовского радиуса состоит в том, что в одной и той же точке присутствуют электроны, скорость дрейфа которых различается на $\rho_e V_0'$. Если электроны в начальный момент сфазиро-

ваны, то при $t \ll (\rho_{\text{еr}} k V_0')^{-1}$ это различие незаметно. Однако при $t \geq (\rho_{\text{еr}} k V_0')^{-1}$, когда отдельные электроны разойдутся по θ_y на расстояние порядка длины волны, возмущение затухнет. Отметим, что данный механизм в отличие от механизма затухания под действием вязкости является обратимым.

2.1.3. Поверхностные волны. Диокотронная неустойчивость. Согласно аналогу теоремы Рэлея, газ заряженных частиц в магнитном поле не может поддерживать незатухающие желобковые колебания, если его плотность меняется в пространстве монотонно. Затухание колебаний вызывается резонансным взаимодействием с движением заряженных частиц. Основываясь на аналогии с колебаниями плоскопараллельных течений идеальной жидкости, можно утверждать, что при собственных колебаниях условие резонанса обязательно должно выполняться в пределах систем, ограниченной идеально проводящими стенками (см. § 1.1). Однако очевидно, что если плотность заряженных частиц в резонансной точке стремится к нулю, то будет стремиться к нулю и декремент затухания колебаний. В пределе $n_0(r_s) = 0$, что аналогично условию $V_0''(x_s) = 0$ в плоском случае, получим незатухающие колебания.

Проанализируем эту возможность на простейшем примере аксиально симметричного ступенчатого распределения плотности заряженных частиц (рис. 2.4). Частота вращения ω_0 постоянна при $r < a$ ($\omega_0 = \omega_{pe}^2 / (2\omega_{ce})$) и спадает при $r > a$ ($\omega_0 = \omega_{pe}^2 / (2\omega_{ce}) (r/a)^2$). В обеих областях $(r^2 \omega_0) r^{2n} = 0$, поэтому решение (2.3), удовлетворяющее условию ограниченности в нуле, имеет вид

$$\varphi_1 = \begin{cases} (r/a)^m, & r < a; \\ \alpha (r/a)^m + \beta (a/r)^m, & r > a. \end{cases} \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что плотность заряженных частиц возмущается лишь на поверхности цилиндра ($r = a$), поэтому рассматриваемые колебания могут быть названы поверхностными волнами. В то же время, поскольку при $r = a$ зависимость $\omega_0(r)$ имеет излом, то поверхностные волны идентичны колебаниям, рассматривавшимся в п. 1.6.1.

Константы α , β , входящие в решение (2.9), а также частоты собственных колебаний определяются граничным условием $\varphi_1(r_1) = 0$, условием непрерывности потенциала при $r = a$ и условием сшивки производных, получаемым из (2.3). Несложные вычисления дают

$$\omega = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}} \left(1 - m - \left(\frac{a}{r_1} \right)^{2n} \right).$$

Из последнего выражения следует, что в соответствии с вышесказанным резонансное условие $\omega = m\omega_0(r)$ действительно выполняется на интервале $(0, r_1)$, причем резонансная точка падает на область, свободную от плазмы (a, r_1).

Предположим теперь, что и в области (a, r_1) имеется небольшое количество заряженных частиц. Учитывая их влияние на ко-

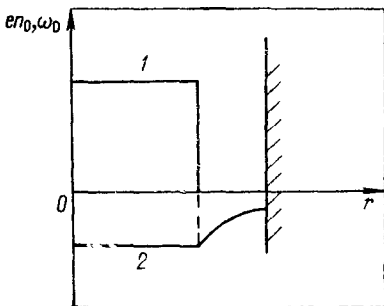


Рис. 2.4. Распределение плотности заряда (1), при котором существуют поверхностные волны; 2 — соответствующее распределение скорости вращения

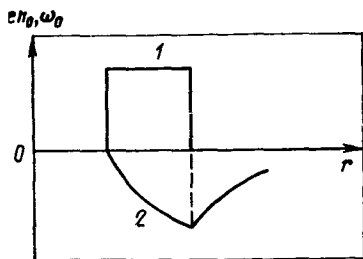


Рис. 2.5. Распределение плотности заряда (1), при котором раскачивается диокотронная неустойчивость; 2 — соответствующее распределение скорости вращения

ления по методу последовательных приближений, находим мнимую часть частоты поверхностных колебаний [56, 11]:

$$\text{Im } \omega = \frac{\pi \alpha}{8 \omega_{ce}^2} \left(2 - \frac{1}{m} \left(1 + \left(\frac{a}{r_1} \right)^{2m} \right) \right) \left(\frac{(\omega_{pe}')^2}{r^2 |\omega_0'|} |\varphi_1|^2 \right)_{r=r_S} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{|\varphi_1|^2} \right)_{r=a}$$

(ср. с п. 1.6.1). Как и следовало ожидать, поверхностные волны затухают, если в резонансной точке $d\omega_{pe}^2/dr < 0$, и нарастают, если $d\omega_{pe}^2/dr > 0$.

Предельный случай неустойчивости, развивающейся при монотонном распределении плотности частиц по радиусу, — неустойчивость профиля, изображенного на рис. 2.5. Эта неустойчивость называется диокотронной [58, 59]. В рассматриваемом случае зависимость $\omega_0(r)$ дается выражением

$$\omega_0(r) = \begin{cases} 0, & r < a_1; \\ \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}} \left(1 - \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 \right), & a_1 < r < a_2; \\ \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}} \left(\left(\frac{a_2}{r} \right)^2 - \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 \right), & a_2 < r. \end{cases} \quad (2.10)$$

Для зависимости (2.10) «точка перегиба», в которой $(r^2 \omega_0)''_{r^2} = 0$, как бы растянута на весь интервал $(a_1 a_2)$.

2.2. Разреженная некомпенсированная плазма

2.2.1. Желобковая неустойчивость. Желобковые колебания играют важную роль в динамике высокотемпературной — термоядерной плазмы, которая обычно удерживается с помощью магнитного поля. Во многих системах, предназначенных для изучения термоядерного синтеза, плазма имеет вид шнура, вытянутого вдоль силовых линий магнитного поля. Желобковые колебания плазменного

шнура неустойчивы, если напряженность магнитного поля уменьшается с удалением от центра шнура. Неустойчивость желобковых колебаний (желбковая неустойчивость) приводит к быстрому развалу плазмы. Для борьбы с ней приходится существенно усложнять геометрию силовых линий магнитного поля. Вместе с тем эксперименты на установках ОГРА-1 [60], «Аlicа» [61] показали, что при сравнительно низкой плотности плазмы можно существенно улучшить ее устойчивость, если привести плазменный шнур во вращение вокруг его оси. При этом угловая скорость должна достаточно резко меняться по радиусу. Возможно, что в основе этого метода стабилизации лежит механизм резонансного поглощения желобковых колебаний, рассматривавшийся в предыдущем параграфе.

Анализ вопроса начнем с краткого рассмотрения самой желобковой неустойчивости. Плотность плазмы будем считать достаточно низкой, так чтобы выполнялось условие $\max(r_{di}, r_{de}) \gg r_B$, где r_n, r_B — характерные масштабы изменения плотности плазмы и магнитного поля соответственно (обычно $r_B \gg r_n$), $r_{dj} = v_{Tj} / \omega_{pj}$ — дебаевский радиус частиц сорта j ($j=e, i$); v_{Tj} — тепловая скорость; ω_{pj} — плазменная частота. Интересующие нас желобковые колебания распространяются поперек магнитного поля. Соответственно их динамика определяется поперечным дрейфовым движением заряженных частиц, скорость которого при учете неоднородности магнитного поля дается выражением

$$\mathbf{V}_j = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \nabla \varphi] + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} e_j \frac{v_{Tj}^2}{\omega_{cj} B^2} [\mathbf{B} \nabla B]. \quad (2.11)$$

Здесь для простоты всем частицам сорта j приписывается одна и та же скорость теплового движения, а следовательно, и скорость дрейфа \mathbf{V}_j ; дрейф, обусловленный кривизной магнитных силовых линий, не учитывается. Если магнитное поле однородно, то в (2.11) последнее слагаемое отсутствует, и это выражение переходит в использовавшееся в § 2.1. Отметим, что, описывая движение заряженных частиц с помощью (2.11), мы игнорируем эффекты, обусловленные инерцией заряженных частиц и конечностью ларморовского радиуса. Эти приближения справедливы при выполнении условий $\omega \ll \omega_{cj}$, $kr_j \ll 1$, а также вдали от резонансных точек (см. § 2.1).

Предположим, что плазменный шнур имеет ось симметрии (ось Oz), параллельную B . Плотность плазмы и напряженность магнитного поля будем считать не зависящими от азимутального угла θ и координаты z . Предположим также, что в начальном, невозмущенном состоянии плотности электронов и ионов одинаковы — плазма нейтральна ($\varphi_0 = \text{const}$). Из-за неоднородности магнитного поля электроны и ионы дрейфуют по азимуту в противоположные стороны с

$$\omega_{0j} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} e_j \frac{v_{Tj}^2}{\omega_{cj} r} \frac{1}{B} \frac{dB}{dr}.$$

Колебания рассматриваемой системы имеют вид волн, бегущих по азимуту $\sim f(r) \exp(-i\omega t + im\theta)$. В них возмущаются плотности заряженных частиц ($n_j = n_{0j} + n_{1j}$) и электрический потенциал ($\varphi = \varphi_1$). Ввиду низкой плотности плазмы возмущения магнитного поля малы и их можно не учитывать.

Подставляя (2.11) в уравнения неразрывности, находим возмущения плотности заряженных частиц $n_{1j} = -\frac{1}{\omega - m\omega_{0j}} \frac{c}{B} \frac{m}{r} \times \times \frac{dn_0}{dr} \varphi_1$. При этом уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \varphi_1 - \frac{m^2}{r^2} \varphi_1 + \frac{(\omega_{0e} - \omega_{0i})}{(\omega/m - \omega_{0e})(\omega/m - \omega_{0i})} \frac{1}{r\omega_{ci}} \frac{d\omega_{pi}^2}{dr} \varphi_1 = 0. \quad (2.12)$$

Здесь и в дальнейшем в силу соотношения $r_B \gg r_n$ (см. выше) неоднородность магнитного поля учитывается лишь в выражениях для скорости дрейфа ω_{0e} , ω_{0i} .

Предположим, что выполняется условие $|\omega_{0e} - \omega_{0i}| \ll (\omega_{pi}^2/\omega_{ci}) \times \times r_{di}^2/(r_n r_B)$. В этом случае оказывается, что $\omega \gg m\omega_{0j}$, и уравнение (2.12) можно приближенно представить в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \varphi_1 - \frac{m^2}{r^2} \varphi_1 + \frac{m^2(\omega_{0e} - \omega_{0i})}{\omega^2} \frac{1}{r\omega_{ci}} \frac{d\omega_{pi}^2}{dr} \varphi_1 = 0.$$

Умножив последнее уравнение на $r\varphi_1^*$ и проинтегрировав по радиусу, находим частоту собственных колебаний:

$$\omega^2 = m^2 \left(\frac{\omega_{0e} - \omega_{0i}}{\omega_{ci}} \right) \int_0^\infty dr |\varphi_1|^2 \frac{d\omega_{pi}^2}{dr} \left/ \int_0^\infty dr r |\nabla\varphi_1|^2 \right. \quad (2.13)$$

Желобковые колебания неустойчивы ($\omega^2 < 0$), если $\omega_{0e} - \omega_{0i} > 0$, т. е. магнитное поле, как и плотность плазмы, спадает по радиусу.

Выражение (2.13) показывает, что неустойчивость вызывается различием в скоростях дрейфа электронов и ионов. Механизм раскачки колебаний иллюстрируется рис. 2.6. На нем изображено поперечное по отношению к \mathbf{B} сечение плазменного шнура с «язычком» (желобком) плазмы, выброшенным наружу. Из-за того, что возмущение нарушает азимутальную симметрию системы, дрейф частиц, обусловленный неоднородностью магнитного поля, вызывает разделение зарядов прежде нейтральной плазмы. Если магнит-

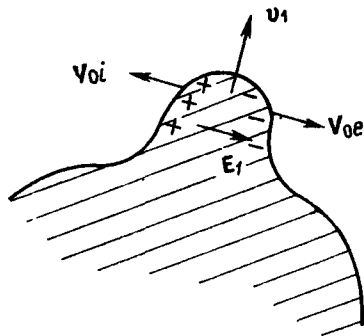


Рис. 2.6. Механизм развития желобковой неустойчивости

ное поле спадает по радиусу, то из-за разделения зарядов создается такое электрическое поле $E_{1\theta}$, в котором плазма выдрейфовывает наружу: $V_{1r} = (c/B)E_{1\theta} > 0$. В результате первоначальное возмущение усиливается.

2.2.2. Стабилизация желобковой неустойчивости. Выясним теперь, как влияет на желобковую неустойчивость радиальное электрическое поле $E_{0r} = -d\varphi_0/dr$, обусловленное начальной раскомпенсацией пространственного заряда. В этом случае, повторяя ту же процедуру, что и при выводе (2.12), получаем [56]:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \varphi_1 + \frac{4}{(\omega/m) - \omega_{0i}} \frac{d^2}{d(r^2)^2} (r^2 \omega_{0i}) \varphi_1 +$$

$$+ \frac{(\omega_{0e} - \omega_{0i})}{(\omega, m - \omega_{0i})(\omega' m - \omega_{0e})} \frac{1}{\omega_{ci}} \frac{1}{r} \frac{d\omega_{pi}^2}{dr} \varphi_1 = 0, \quad (2.14)$$

где $\omega_{0j} = \frac{1}{r} \left(\frac{c}{B} \frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} e_j \frac{v_{Tj}^2}{\omega_{cj} B} \frac{dB}{dr} \right)$.

Обычно плазма занимает присоевную область установки, в которой $B(r) \approx B_0(1 - (r/r_B)^2)$, $r_B \gg r_n$. Радиус кривизны силовых линий магнитного поля дается выражением $R = r_B^2/(2r)$, среднее значение радиуса кривизны в области, занятой плазмой, примерно равно $\langle R \rangle \approx r_B^2/r_n$. Следует отметить, что выражение для скорости ионов (2.11) было получено в пренебрежении инерционным членом в уравнении движения. Рассмотрение показывает, что это приближение законно при достаточно низкой плотности плазмы, когда выполняется условие $r_{dj} \gg \rho_j$.

Уравнение (2.14) отличается от уравнения (2.13) предпоследним слагаемым, которое учитывает возмущение заряда из-за смещений начального заряда $q_0(r) = e(n_{0i}(r) - n_{0e}(r))$ в колебаниях. Оценка показывает, что этот эффект преобладает над эффектом разделения зарядов, вызывающим желобковую неустойчивость [см. последнее слагаемое в (2.14)], при выполнении условия $p = |(n_{0i} - n_{0e})/n_0| \gg r_{dj}/r_B$ [56, 62]*. Если в (2.14) последнее слагаемое опустить, то это уравнение перейдет в уравнение (2.3), рассмотренное в предыдущем параграфе. Следовательно, при достаточно большой раскомпенсации пространственного заряда желобковые возмущения в плазме развиваются так же, как в газе заряженных частиц с плотностью $q_0(r)/e$. Поэтому в соответствии с аналогом теоремы Рэлея (см. § 2.1) следует ожидать, что плазма будет устойчивой, если плотность пространственного заряда в начальном состоянии является монотонной функцией радиуса.

Однако прямой перенос результатов предыдущего параграфа на случай желобковых колебаний нескомпенсированной плазмы может показаться рискованным. Действительно, выше мы видели,

* Здесь и ниже раскомпенсация считается слабой: $n_{0i} \approx n_{0e} \approx n_0$ ($p \ll 1$). В нейтральной плазме ($p=0$) желобковая неустойчивость раскачивается при выполнении условия $r_{dj} \ll r_B \approx (r_n < R)^{1/2}$.

что устойчивость неоднородно движущихся сред определяется явлениями, разыгрывающимися в окрестности резонансной точки. В рассматриваемом случае из-за различия скоростей дрейфа электронов и ионов соответствующие резонансные точки r_{si} , r_{se} сдвинуты друг относительно друга. Если выполняется условие $p \gg r_{aj}/r_B$, то расстояние между ними мало: $|r_{si} - r_{se}| \ll r_{aj}^2 r_n / (pr_B^2) \ll pr_n$. В результате при приближении к резонансу последнее слагаемое в (2.14) возрастает как $\sim (r - r_s)^{-2}$ и на достаточно малых расстояниях от r_s ($|r - r_s| \leq r_n (r_{aj}/p < R)^2$) становится преобладающим.

Покажем тем не менее, что при выполнении условия $p \gg r_{aj}/r_B$ для желобковых колебаний нескомпенсированной плазмы остается справедливым аналог теоремы Рэлея, сформулированный в § 2.1 [56]. Доказательство теоремы Рэлея в § 1.1 основывалось на использовании интегрального соотношения (1.6). В случае желобковых колебаний газа заряженных частиц соотношение, аналогичное (1.6), имеет вид

$$W \int_0^{r_1} r dr |\varphi_1|^2 \frac{4m \operatorname{Im} \omega}{|\omega - m\omega_0|^2} \frac{d^2}{d(r^2)^2} (r^2 \omega_0), \quad (2.15)$$

где $W = \frac{i}{2} r \left(\varphi_1 \frac{d\varphi_1^*}{dr} - \varphi_1^* \frac{d\varphi_1}{dr} \right)$; r_1 — граница плазмы, на которой $\varphi_1 = 0$.

Если выполнено условие $p \gg r_{aj}/r_B$, то решения уравнения (2.14) также удовлетворяют соотношению (2.15). Действительно, предположим сначала, что резонансная точка r_s попадает внутрь интервала $(0, r_1)$. Для колебаний с $\operatorname{Im} \omega > 0$ аналогичное положение занимает проекция r_s на ось действительных значений r . Рассмотрим аналитическое продолжение выражения (2.15) на комплексную плоскость и при вычислении его правой части обойдем точку r_s на достаточно большом расстоянии $|r - r_s| \sim r_n$. На таком контуре интегрирования не учитываемое последнее слагаемое в (2.14) может дать лишь малую поправку порядка $(r_{aj}/(pr_B))^2 \ll 1$, и, следовательно, как и для колебаний газа заряженных частиц, равенство (2.15) не будет удовлетворено.

Пусть теперь резонансная точка приближается к оси ($r_s \rightarrow 0$). При выполнении условия $p \gg r_{aj}/r_B$ отношение последнего слагаемого в (2.14) к $(m/r)^2 \varphi_1$ не превышает $(mpr_{aj}/r_B)^{-2} \ll 1$, и, следовательно, последнее слагаемое может быть опущено.

Предположим, наконец, что область, в которой существенно последнее слагаемое в (2.14), включает в себя граничную точку $r_1 - r_s \leq r_1 (r_{aj}/pr_B)^2$. Из выражений (1.11), (1.12) следует, что если граничная точка r_1 совпадает с полюсом уравнения (2.13), то в ее окрестности решение имеет вид $\varphi_1 \sim C(r - r_1)/r_1$. Нетрудно показать, что при добавлении в (2.14) слагаемого типа $\sim \alpha/(r - r_s)^2$ ($\alpha = (r_{aj}/pr_B)^2 \ll 1$) зависимость $\varphi_1(r)$ вблизи граничной точки практически не меняется. (При $\alpha \ll 1$ «падения на центр» не происходит, см., например, [63].) Учитывая это обстоятельство, рас-

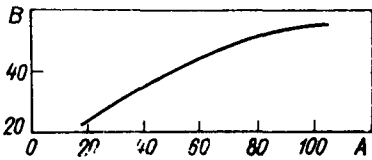


Рис. 2.7. Раскомпенсация плазмы, необходимая для стабилизации желобковой неустойчивости, в функции плотности плазмы [64]

смотрим соотношение (2.15), в которое в качестве φ_1 подставим решение уравнения (2.14) а в качестве верхнего предела $-r_1'$ ($r_n(r_{aj}/pr_B)^2 \ll r_1 - r_1' \ll r_n$). Правая часть модифицированного соотношения (2.15) с точностью до величин порядка $(r_{aj}/(pr_B))^2 \ll 1$ останется неизменной. В левой же части будет стоять хотя и отличная от нуля, но малая величина $|W(r_1')| \sim (r_1 - r_1') |d\varphi/dr|^2$. Таким образом, соотношение, аналогичное (2.15), не может быть удовлетворено и, следовательно, незатухающие желобковые колебания с $r_s \approx r_1$ отсутствуют.

Проведенный анализ не охватывает особого решения $\varphi_1 \approx \approx r(\omega - \omega_0(r))$ при $m=1$, см. п. 2.1.1. Вопрос о его устойчивости, по-видимому, может быть решен только численно. Полное исследование задачи об устойчивости желобковых колебаний нескомпенсированной плазмы было произведено в [64]. В этой работе для возмущений плотности заряженных частиц в желобковых колебаниях использовались выражения вида (2.5), регулярные на всем интервале изменения координаты r при любых значения $\text{Im } \omega$. Принималось, что радиальная зависимость плотности заряженных частиц имеет вид $n_{0j}(r) = n_{0j}(0) (1 - (r/r_n)^2)$. В этом случае плотность пространственного заряда монотонно спадает по радиусу, т. е. удовлетворяет условию устойчивости (критерию Рэлея). Вычисления подтвердили возможность стабилизации плазмы по отношению ко всем модам желобковых колебаний. Наиболее неустойчивой оказалась мода с наименьшими азимутальным ($m=1$) и радиальным ($n=0$) волновыми числами. Критическое значение раскомпенсации, характеризуемое величиной $B = A(n_{0i} - n_{0e})/n_{0e}$ ($A = (1/2) \omega_{pe}^2(0) (\omega_{ce} \omega_{oi} |_{\varphi_0=0})^{-1}$), в функции от плотности плазмы ($A \sim n_{0e}(0)$) изображено на рис. 2.7. Соответствующая зависимость $B(A)$ близка к $B = \sqrt{A}$, что эквивалентно соотношению $p = = r_{di}/r_B$. В [64] рассматривалась плазма с $r_{di} \gg r_{de}$.

В заключение отметим, что значение раскомпенсации плазмы, потребовавшееся для стабилизации желобковой неустойчивости в экспериментах [60], по порядку величины совпадает с определенным теоретически.

2.3. Плотная вращающаяся плазма

2.3.1. Холодные ионы. Рассмотрим теперь желобковые колебания достаточно плотной плазмы, для которой выполняется условие $r_{di} \ll \rho_i$, или в другом виде $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$. (В § 2.2 считалось $r_{dj} \gg \rho_j$.) В плотной плазме значительные электрические поля воз-

никают при ничтожной раскомпенсации зарядов (плазма квазинейтральна). Условие квазинейтральности $n_{1i} \approx n_{1e}$ выполняется и в желобковых колебаниях, причем компенсация зарядов становится настолько точной, что при расчете n_{1j} приходится учитывать небольшие различия в движении электронов и ионов, обусловленные инерцией ионов при $\omega \ll \omega_{ci}$ и конечностью их ларморовского радиуса при $k\rho_i \ll 1$. Учет эффектов конечности ларморовского радиуса довольно сложен и требует использования кинетического уравнения. Рассмотрим сначала более простой случай холодных ионов, когда $\rho_i = 0$. Эффекты конечности ларморовского радиуса электронов можно не учитывать вплоть до очень высоких температур, не достигаемых в реальных экспериментах. Поэтому для скоростей электронов по-прежнему используем выражение (2.11). Движение ионов будем описывать гидродинамическим уравнением движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m_i} \left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right). \quad (2.16)$$

С помощью уравнения (2.16) и уравнения неразрывности в [65] было получено следующее выражение для возмущения плотности ионов в желобковых колебаниях:

$$n_{1i} = \frac{1}{4\pi e} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\omega_{pi}^2}{\Delta_i} \frac{d}{dr} \varphi_1 \right) - \frac{m^2}{r^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\Delta_i} \varphi_1 - \frac{m}{(\omega - m\omega_{0i})} \varphi_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\Delta_i} (\omega_{ci} + 2\omega_{0i}) \right) \right), \quad (2.17)$$

где $\Delta_i = -(\omega - m\omega_{0i})^2 + (\omega_{ci} + 2\omega_{0i})(\omega_{ci} + (1/r)(r^2\omega_{0i})r')$; $\omega_{0i} = \frac{1}{r} \times \times \frac{c}{B} \frac{d\varphi_0}{dr} - \left(\frac{1}{r} \frac{c}{B} \right)^2 \frac{1}{\omega_{ci}} \left(\frac{d\varphi_0}{dr} \right)^2$.

Рассматривается та же модель бесконечного по Oz аксиально-симметричного плазменного шнура, что и в § 2.2.

Приравнявая (2.17) и возмущение плотности электронов (см. § 2.2), получаем уравнение желобковых колебаний квазинейтральной плазмы:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} \right)^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) - \left(\frac{m}{r} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} \right)^2 \varphi_1 + \varphi_1 \frac{4m}{\omega - m\omega_{0i}} \frac{d}{d(r^2)} \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} \right)^2 \times \times \frac{d}{d(r^2)} (r^2\omega_{0i}) + \varphi_1 \frac{2m^2 (\omega_{0e} - \omega_{0i})}{(\omega - m\omega_{0e})(\omega - m\omega_{0i})} \frac{d}{d(r^2)} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}} = 0. \quad (2.18)$$

В п. 2.2.1 было показано, что «движущей силой» желобковой неустойчивости является разделение зарядов в аксиально-несимметричных возмущениях, вызванное их дрейфом в неоднородном магнитном поле. Такое же воздействие оказывает дрейф заряженных частиц, обусловленный центробежной силой, возникающей при движении частиц по азимуту со скоростью $-(c/B)d\varphi_0/dr$. Из-

за большей массы центробежный эффект особенно значителен для ионов. Он учитывается вторым слагаемым в выражении для скорости дрейфа ионов ω_{oi} (см. выше).

В [65] уравнение (2.18) исследовалось как аналитически, так и численно. Аналитические результаты удалось получить в двух простейших случаях: однородной плотности плазмы и одного вращения. При однородной плотности последнее слагаемое в (2.18) обращается в нуль, и это уравнение после сокращения на постоянный множитель $(\omega_{pi}/\omega_{ci})^2$ становится тождественным с уравнением (2.3), изучавшимся в п. 2.1.1. Основываясь на результатах этого параграфа можно утверждать, что колебания плазмы с постоянной плотностью устойчивы, если величина $\frac{d^2}{d(r^2)^2} (r^2\omega_{oi})$ не меняет знака (критерий Рэлея).

В другом предельном случае однородного вращения удобно умножить уравнение (2.18) на ϕ_1^* и проинтегрировать по области, занятой плазмой. При этом получим квадратное уравнение для частоты колебаний. Оно не имеет комплексных решений (колебания устойчивы), если плотность плазмы нарастает по радиусу. Этот результат вполне естествен и согласуется с анализом механизма желобковой неустойчивости, проведенным в п. 2.2.1.

В [65] уравнение (2.18) использовалось также для численного анализа устойчивости желобковых колебаний в установке СВИПП (стабилизация вращением и профилем плотности). Эта установка представляет собой коаксиальную пробочную ловушку. В ней плазма располагается между двумя цилиндрами, ось которых параллельна магнитному полю. Чтобы улучшить пробочное удержание, в системе создается сильное радиальное электрическое поле, приводящее к быстрому вращению плазмы (скорость вращения должна превышать тепловую). Для стабилизации желобковых колебаний в установке предполагается поддерживать нарастающий по радиусу профиль плотности. В этом случае, было показано в [65], устойчивы и неоднородные профили скорости вращения с $d\omega_{oi}/dr < 0$.

По нашему мнению, быстрое неоднородное вращение может стабилизировать желобковые колебания даже в обычных системах, где плазма имеет вид цилиндрического шнура, с плотностью, спадающей по радиусу. Для этого необходимо, чтобы характерный масштаб изменения скорости вращения r_E был мал по сравнению с r_n . В этом случае уравнение (2.18) по своей структуре становится сходным с уравнением (2.14), описывающим желобковые колебания разреженной некомпенсированной плазмы. В нем так же, как и в (2.14), последнее слагаемое существенно лишь в малой резонансной области. Если это слагаемое опустить, то уравнение (2.18) станет аналогичным (2.3). Учитывая это сходство, заключаем, что желобковые колебания устойчивы при условии знакопостоянства величины $\frac{d}{d(r^2)} \left(n_0 \frac{d}{d(r^2)} (r^2\omega_{oi}) \right)$. Поскольку предполагалось, что скорость вращения меняется по радиусу на-

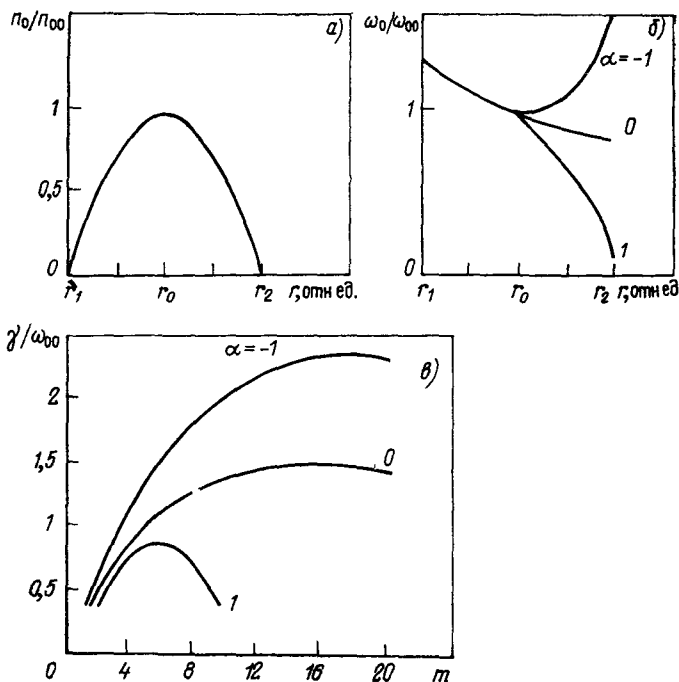


Рис. 2.8. Устойчивость вращающегося слоя при различных профилях угловой скорости [66]:

a — профиль плотности плазмы $n_0(r) = n_{00}(1 - (r - r_0/a)^2)$, $r_0 = (1/2)(r_1 + r_2)$, $a = (1/2)(r_2 - r_1)$; $r_1/r_2 = 3/5$, b — профили скорости вращения $\omega_0(r) = \omega_{00}\varepsilon(r)r_0/r$, $\varepsilon(r) = 1$ ($r < r_0$); $\varepsilon(r) = 1 - \alpha((r - r_0)/a)^2$ ($r > r_0$), b — инкремент неустойчивых колебаний

много быстрее плотности плазмы ($r_E \ll r_n$) последняя величина приближенно равна $n_0 \frac{d^2}{d(r^2)^2} (r^2 \omega_{0i})$. Она не меняет знака, если

$|\omega_{0i}|$ возрастает по радиусу. Используя затем соображения, аналогичные приведенным в п. 2.2.2, приходим к выводу, что при монотонном и резком ($r_E \ll r_n$) изменении скорости вращения желобковые колебания плазмы, описываемые полным уравнением (2.18), устойчивы.

Стабилизирующий эффект неоднородного вращения был обнаружен в [66], где исследовалась устойчивость плазмы в установке ПСП (пробкотрон со скрещенными полями). Эта установка сходна с описанной выше установкой СВИПП, однако в отличие от последней в ПСП плотность плазмы меняется по радиусу не монотонно, обращаясь в нуль на поверхностях обоих цилиндров (внутреннего и внешнего). Наличие области, в которой $dn_0/dr < 0$, представляет особую опасность для устойчивости плазмы. В [67] анализировалась устойчивость различных профилей скорости вращения. Оказалось, что стабилизирующий эффект неоднородного вращения проявляется уже при $r_E \sim r_n$. В этом случае устойчивость

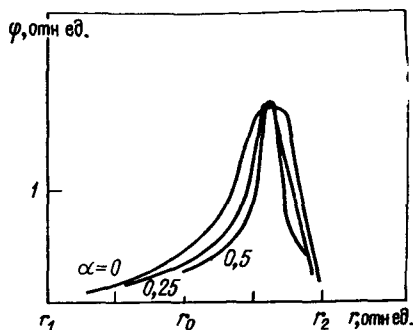


Рис. 2.9. Радиальная зависимость возмущенного потенциала при $m=10$ для различных профилей скорости вращения [67]

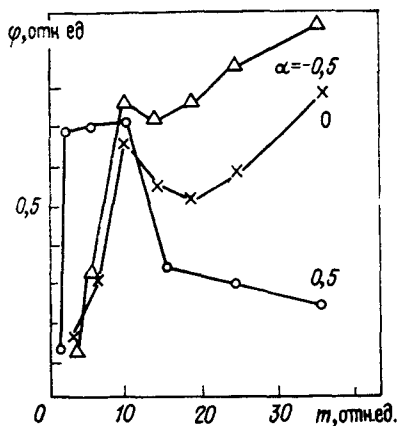


Рис. 2.10. Экспериментальная зависимость амплитуды колебаний в функции от азимутального волнового числа для различных профилей скорости вращения [66]

желобковых колебаний существенно зависит от знака $n'\omega'_0$ (рис. 2.8). Эта особенность пока не получила простого объяснения. В то же время преимущественное влияние неоднородности на высокие азимутальные моды согласуется с результатами анализа в § 1.4. Действительно, собственные колебания с $m \gg 1$, если они существуют, локализованы в малых областях по радиусу. Поэтому при их рассмотрении аксиальную симметрию можно заменить плоской ($r \rightarrow x$, $m/r \rightarrow k_y \dots$), и соответствующим образом модифицированное уравнение (2.18) попадает в класс уравнений, рассматривавшихся в § 1.4. В этом параграфе было показано, что неоднородность профиля скорости препятствует существованию коротковолновых неустойчивых колебаний, локализованных во внутренней области плазмы. Такие колебания «прижимаются» к границе плазмы ($r \approx r_1$), причем их частота удовлетворяет условию $\omega \approx m\omega_0(r_1)$. Расчеты, проведенные в [67], подтверждают эти выводы (рис. 2.9).

Целенаправленное экспериментальное исследование влияния неоднородности вращения на желобковую неустойчивость производилось на установке ПСП [66]. Полученные результаты качественно соответствуют теории (рис. 2.10). Отметим, что в расчетах не было получено полной стабилизации плазмы. Возможно, это обусловлено «слабой» неоднородностью рассматривавшихся профилей скорости вращения ($r_E \sim r_n$), что соответствовало условиям экспериментов [66]. В то же время и само уравнение, использовавшееся для описания желобковых колебаний, становится непригодным при $\text{Im} \omega \rightarrow 0$, так как в нем необходимо более полно учитывать эффекты конечного ларморовского радиуса, как это сделано в пп. 2.1.2, 2.3.2.

2.3.2. Горячие ионы. Наряду с дрейфом в скрещенных полях для плазмы в магнитном поле характерен еще один вид движения—ларморовский или обтекающий дрейф. Он возникает при наличии

градиента давления плазмы, направленного поперек магнитного поля.

В отсутствие электрического поля гидродинамическое уравнение равновесия для j -ого компонента плазмы имеет вид

$$0 = -\nabla p_j + \frac{e_j n}{c} [\mathbf{V}_j \mathbf{B}], \quad (2.19)$$

откуда $\mathbf{V}_j = \frac{c}{e_j n B^2} |\mathbf{B} \nabla p_j|$, $p_j = n T_j$.

Если, например, градиент давления направлен по радиусу, то частицы дрейфуют в азимутальном направлении, причем, как и при дрейфе в неоднородном магнитном поле, электроны движутся навстречу ионам. Однако в отличие от дрейфа в неоднородном магнитном поле ларморовский дрейф не связан с перемещением центров ларморовских кружков и по своей природе аналогичен току намагничивания неоднородных образцов, помещенных в магнитное поле (см., например, [68]). Поэтому он не приводит к разделению зарядов при нарушении аксиальной симметрии плазмы и, следовательно, не может быть причиной желобковой неустойчивости (ср. с п. 2.2.1). [При появлении азимутального компонента ∇p_j вектор скорости ларморовского дрейфа поворачивается, так что векторы \mathbf{V}_j , ∇p_j остаются взаимно перпендикулярными, см. (2.19).] Специфический и в какой-то мере фиктивный характер ларморовского дрейфа приводит к тому, что на желобковые колебания реально влияет лишь ларморовский дрейф более тяжелых частиц — ионов. В уравнение желобковых колебаний ларморовский дрейф входит через так называемые эффекты конечного ларморовского радиуса, учитываемые посредством инерционных и вязких членов в уравнении движения. (Инерция и вязкость оказывают большее воздействие на движение ионов, что соответствует большей величине их ларморовского радиуса. Под вязкостью здесь понимается «косая» или «бесстолкновительная» вязкость, обусловленная конечными размерами ларморовских орбит (см., например, [68]). Другой и, может быть, более простой способ учета эффектов конечного ларморовского радиуса состоит в использовании кинетического уравнения. Именно так в [69] было получено дифференциальное уравнение желобковых колебаний, учитывающее влияние ларморовского дрейфа:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} S \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} + \left(\frac{1-m^2}{r^2} S + \left(m^2 \frac{G}{r} + \omega^2 \right) r \frac{dn_0}{dr} \right) \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (2.20)$$

где

$$S = \omega(\omega - m\omega_{li}) r^3 n_0; \quad \omega_{li} = \frac{1}{m_i \omega_{ci} r n_0} \frac{dp_{oi}}{dr};$$

$$G = \frac{1}{m_i r_B^2} \frac{dp_0}{dn_0}; \quad p_0 = p_{oi} + p_{oe}; \quad \tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{r} \varphi_1.$$

В [69] была рассмотрена устойчивость плазмы с гауссовым профилем плотности и давления $n_0, p_{0j} \sim \exp(-r/r_n)^2$, при котором угловая скорость ларморовского дрейфа ω_{li} не зависит от радиуса. Считая $\omega_{li} = \text{const}$, умножим (2.20) на $r\tilde{\varphi}_1^*$ и проинтегрируем по радиусу. В результате получим дисперсионное уравнение для частоты собственных колебаний:

$$\omega^2(1+A) - \omega m \omega'_{li} + m^2 GA = 0, \quad (2.21)$$

где

$$A = \left\langle r^2 \frac{dn_0}{dr} \middle| \tilde{\varphi}_1 \right|^2 \left\langle r^3 n_0 \left(\left| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} \right|^2 + \frac{m^2 - 1}{r^2} \left| \tilde{\varphi}_1 \right|^2 \right) \right\rangle^{-1};$$

скобки означают усреднение по радиусу. Неоднородность магнитного поля, учитываемая последним слагаемым в (2.21), может приводить к неустойчивости желобковых колебаний ($\omega^2 < 0$). Однако колебания стабилизируются при достаточно большой скорости ларморовского дрейфа $\omega_{li} > 4GA(1+A)$. Если ввести средний ларморовский радиус ионов $r_{Ti} = (T_i/m_i)^{1/2}/\omega_{ci}$ и учесть, что значение A по порядку не превышает единицы, то условие устойчивости можно представить в виде $r_{Ti} r_E \geq r_n^2$.

Следует отметить, что стабилизация за счет эффектов конечного ларморовского радиуса ионов не является полной. Как бы ни был велик ларморовский радиус, остается неустойчивой особая мода желобковых колебаний, аналогичная рассмотренной в п. 2.1.2. Действительно, уравнение (2.20) будет удовлетворено, если положить $\tilde{\varphi}_1 = \text{const}$ ($\varphi_1 \sim r$), $m=1$, $\omega^2 = -G < 0$, причем особое решение существует при произвольном профиле плотности плазмы, даже когда $\omega_{li} \neq \text{const}$. Если, как это часто бывает, плазма окружена металлическим кожухом, то решение $\varphi_1 = \text{const } r$ не будет удовлетворять граничному условию. Поэтому может показаться, что его не следует принимать во внимание. Однако в [70] показано, что поблизости от границы к особому решению подстраивается второе линейно независимое решение уравнения (2.20). Их сумма на границе обращается в нуль, при этом собственное значение частоты, полученное с учетом граничного условия $\varphi_1 = 0$, практически не отличается от приведенного выше $\omega = iG^{1/2}$.

С увеличением ω_{li} одно из двух решений уравнения (2.21) стремится к $m\omega_{li}$. Отсюда следует, что при больших значениях ω_{li} даже незначительные вариации этой величины ведут к появлению резонанса $\omega = m\omega_{li}$. Резонанс с ларморовским дрейфом отличается от рассмотренных выше. В силу того что при ларморовском дрейфе ларморовские кружки покоятся, фаза волны для частиц, находящихся в резонансных точках, меняется со временем, и, следовательно, резонансное поглощение отсутствует. Действительно, в [71] показано, что в окрестности резонансной точки происходит не поглощение колебаний, а резкое уменьшение их длины волны (трансформация в коротковолновые). В этой области для регуляризации уравнения желобковых колебаний необходимо более полно учитывать эффекты конечного ларморовского ради-

уса ионов, что повышает его порядок. [Напомним, что уравнение (2.20) было получено разложением по ρ_i/a , и в нем учтены лишь члены порядка $(\rho_i/a)^2$.] Однако в случае простейшего — максвелловского распределения ионов по скоростям даже полный учет эффектов конечности ларморовского радиуса ионов не регулирует задачу. Из-за этих трудностей в вопросе о влиянии ларморовского дрейфа ионов на желобковые колебания остается много неясного. По существу, детально проанализирован лишь случай однородного дрейфа.

Еще в меньшей степени исследованы желобковые колебания при одновременном наличии как ларморовского дрейфа, так и дрейфа в скрещенных полях. Уравнение желобковых колебаний, учитывающее оба этих вида движения, было получено в [72], см. также [70]. В [72] бесстолкновительное кинетическое уравнение для ионов в присутствии желобковых колебаний решалось разложением по малому параметру ω_{ci}^{-1} , в [70] использовался стандартный метод интегрирования по траекториям. Полученное в этих работах уравнение желобковых колебаний имеет вид (2.20) с $S = (\omega - m\omega_0) (\omega - m\omega_{li} - m\omega_0) r^3 n_0$, $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 / (r(\omega - m\omega_0))$, $\omega_0 = (c/rB) d\varphi_0/dr$. Модифицированное уравнение (2.20) переходит в (2.18), если положить $\omega_{li} = 0$, а в (2.18), считая разность $\omega_{oi} - \omega_{oe}$ малой, резонансный знаменатель разложить по отношению $(\omega_{oi} - \omega_{oe}) / (\omega - \omega_0)$.

3. КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

3.1. Поток с линейным профилем скорости

Простейшими плазменными колебаниями являются электронные ленгмюровские. Рассмотрим колебания электронного потока, движущегося на фоне неподвижных ионов. Будем считать, что плазма помещена в сильное магнитное поле. В достаточно сильном магнитном поле движение электронов становится одномерным (скорость параллельна магнитному полю), что еще более упрощает задачу.

Введем декартову систему координат, ось Oz которой направлена вдоль магнитного поля, ось Ox — в направлении градиента скорости $V_0(r)$. Рассмотрим колебания потока с простейшим линейным профилем скорости.

Используя уравнение Пуассона, уравнение неразрывности и уравнение движения электронов, линеаризованные по малым возмущениям, нетрудно получить следующее уравнение самосогласованных колебаний:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_z V_0(x))^2} - 1 \right) k_z^2 \varphi_1 = 0. \quad (3.1)$$

Здесь возмущения потенциала выбраны в виде $\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi(x) \times \times \exp(-i\omega t + ik_z z)$. Считается, что тяжелые ионы не участвуют в быстрых электронных колебаниях, а их пространственное распределение однородно, $n_0(r) = n_0$.

Очевидно, что в одномерном случае ($\partial/\partial x = 0$) покоящихся электронов ($V_0 = 0$) рассматриваемые колебания переходят в обычные электронные ленгмювские.

Уравнение (3.1) справедливо на достаточно большом расстоянии от резонансной точки x_S . В ее окрестности необходимо учитывать тепловой разброс электронов по скоростям. Если распределение электронов по скоростям вдоль магнитного поля является сдвинутым максвелловским $f_0(v_z) = (\pi v_{Te})^{-1/2} \exp\{-[(v_z - V_0(x))/v_{Te}]^2\}$, то уравнение для возмущений электрического потенциала принимает вид (см., например, [45]):

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \left(\frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \right)^2 (1 + i \sqrt{\pi} \xi W(\xi)) \varphi_1 = 0, \quad (3.2)$$

где $\xi = (\omega - k_z V_0(x)) / (k_z v_{Te})$; $W(\xi)$ — интеграл вероятности от комплексного аргумента [см. (2.6)]. Для определенности считаем $V_0' > 0$. Используя асимптотику функции $W(\xi)$, находим, что вне сектора $\pi/4 < x - x_S < 3\pi/4$ на достаточно больших расстояниях от точки x_S уравнение (3.2) может быть заменено более простым — «гидродинамическим» уравнением (3.1). «Кинетический» сектор расположен на плоскости комплексного переменного так же, как заштрихованный сектор на рис. 2.3 (см. гл. 2). Таким образом, как и в большинстве случаев, рассмотренных выше, для продолжения решения через точку x_S можно пользоваться упрощенным уравнением (3.1), дополненным правилом обхода Ландау.

Рассмотрим прохождение колебаний через резонансную точку. При таком прохождении меняются многие характеристики колебаний. Так, из квазиклассического дисперсионного соотношения

$$\omega = k_z V_0(x) + k_z \omega_{pe} / (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$$

следует, что в области, где $V_0(x) < \omega/k_z$, проекции групповой и фазовой скоростей на Ox имеют разные знаки, а в области, где $V_0(x) > \omega/k_z$, одинаковые:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{k_x}{k_x^2 + k_z^2} (k_z V_0(x) - \omega). \quad (3.3)$$

В резонансной точке меняется также знак энергии колебаний (ср. со звуком в движущейся среде, см. § 1.11):

$$W = \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \frac{|E|^2}{8\pi} = \frac{\omega}{\omega - k_z V_0(x)} \frac{k^2 |\varphi_1|^2}{4\pi}, \quad (3.4)$$

где $\varepsilon = 1 - \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega - k_z v_0(x)} \right)^2$ — скалярная диэлектрическая проницаемость.

В то же время поток энергии вне зависимости от соотношения между ω/k_z и $V_0(x)$ всегда направлен навстречу фазовой скорости:

$$S_x = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} W = -\omega k_x \frac{|\varphi_1|^2}{4\pi}. \quad (3.5)$$

В окрестности резонансной точки уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + \left(\frac{\omega_{pe}}{V_0'(x-x_S)} \right)^2 \varphi_1 = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) находим $\varphi_1 \approx (x-x_S)^{1/2 \pm \sqrt{\mu}}$, где $\mu = 1/4 - (\omega_{pe}/V_0')^2$. Если выполняется условие $(\omega_{pe}/V_0')^2 > 1/4$, то происходит так называемое падение на резонансную точку: длина волны колебаний по мере приближения к точке x_S неограниченно уменьшается [$k_x = \pm \omega_{pe}/(V_0'(x-x_S))$]. Для продолжения решения через точку x_S воспользуемся правилом обхода Ландау. При этом находим следующие условия сопряжения решений по разные стороны от резонансной точки:

$$|x-x_S|^{1/2+i\sqrt{|\mu|}} \rightleftharpoons (x-x_S)^{1/2+i\sqrt{|\mu|}} \exp(-\pi\sqrt{|\mu|}) \quad (3.7)$$

для волны, падающей слева, т. е. из области, где $V_0(x) < \omega/k_z$, и

$$|x-x_S|^{1/2-i\sqrt{|\mu|}} \exp(-\pi\sqrt{|\mu|}) \rightleftharpoons (x-x_S)^{1/2-i\sqrt{|\mu|}} \quad (3.8)$$

для волны, падающей справа. Здесь направление распространения определяется по знаку групповой скорости (3.3). Соотношения (3.7), (3.8) показывают, что через резонансную точку сигнал проходит без отражения, при этом он ослабевает — коэффициент прохождения $T = \exp(-2\pi\sqrt{|\mu|}) < 1$. Близкое значение коэффициента прохождения было найдено в [73]. В этой работе для определения T использовалось уравнение (3.2). Отметим, что уменьшение амплитуды колебаний не обязательно свидетельствует о поглощении их энергии в резонансной точке. Так, в соответствии с соотношениями (3.3) — (3.5) находим, что при падении сигнала справа резонансная точка излучает энергию в обе стороны, причем направо энергии излучается больше, чем налево (рис. 3.1).

Теперь постараемся понять, почему при линейном профиле скорости электронного потока резонансное взаимодействие приводит к поглощению колебаний. Как отмечалось выше, анализ резонансного взаимодействия значительно облегчается, если его проводить в адекватно выбранной системе отсчета. В данном случае систему отсчета естественно связать с источником колебаний. Так, если рассматривать колебания, распространяющиеся слева, т. е. из области, где $V_0(x) < \omega/k_z$, то в системе отсчета, связанной с источником, фазовая скорость колебаний будет положительна. При этом поскольку $T < 1$, амплитуда колебаний в области, занятой резо-

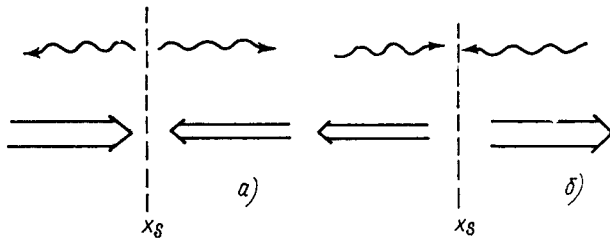


Рис. 3.1. Схема, поясняющая распространение сигнала через резонансную точку x_s : волнистые стрелки показывают направление фазовой скорости, широкие — направление потока энергии; а — сигнал распространяется слева направо ($V_{gp} > 0$); б — сигнал распространяется справа налево ($V_{gp} < 0$)

нансными частицами, отстающими от колебаний, будет больше, чем в области, где расположены частицы, опережающие колебания*. В результате, хотя при линейном профиле скорости число резонансных частиц, отстающих от колебаний, равно числу опережающих, взаимодействие первых с колебаниями будет более интенсивным, что естественно должно привести к затуханию колебаний [73].

Пусть теперь колебания распространяются справа. В системе отсчета, связанной с источником, их фазовая скорость отрицательна. При этом опять в области, где расположены отстающие частицы, т. е. справа от точки x_s , амплитуда колебаний превышает амплитуду колебаний в области, занятой опережающими частицами. Поскольку резонансное взаимодействие с течением приводит к поглощению колебаний, то при наличии в течении резонансной точки его собственные колебания должны быть затухающими. В безграничной плазме область прозрачности колебаний симметрична относительно точки x_s и с обеих сторон ограничена обычными точками поворота (рис. 3.2). Из рисунка видно, что волновой пакет, двигаясь по области прозрачности, обязательно попадет в резонансную область. Таким образом, колебания неограниченной по $0x$ плазмы будут затухать. В то же время если ввести в систему проводящие поверхности, то незатухающие колебания, вообще говоря, могут появиться. На проводящей поверхности обращается в нуль возмущение электрического потенциала, и она играет роль обычной точки поворота.

Колебания электронного потока с простейшим — линейным профилем скорости, ограниченного идеально проводящими стенками, исследовались в [74], где был сделан вывод о неустойчивости такого потока. В качестве причины неустойчивости указывалась неоднородность профиля скорости потока, т. е. скольжение его слоев, и соответственно была названа *slipping* — неустойчивостью. Этот термин широко используется в настоящее время. Однако в

* Поскольку в рассматриваемом случае ($\mu < 0$) имеет место так называемое падение на центр, различие амплитуд может быть весьма значительным.

[45] показано, что вывод о неустойчивости потока с линейным профилем скорости обусловлен математическими ошибками. Более того, найдено, что при достаточно большом градиенте скорости ($V'_0 > 2\omega_{pe}$), когда течение, согласно [74], неустойчиво, в нем на самом деле отсутствуют незатухающие собственные колебания (аналог теоремы Рэля). При отсутствии собственных колебаний начальные возмущения затухают по степенному закону, причем показатель степени зависит от того, была ли в начальный момент возмущена плотность электронов ($|\varphi_1| \sim t^{\mu-3/2}$) или их скорость ($|\varphi_1| \sim t^{2\mu-1}$) [74]. По прошествии достаточно большого времени становятся существенными эффекты, обусловленные тепловым разбросом электронов по скоростям, что приводит к более резкому затуханию ($|\varphi_1| \sim \exp\{-(k_z v_{Te} t)^2\}$).

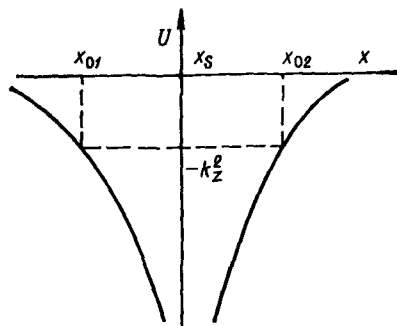


Рис. 3.2. Уравнение (3.2) как уравнение Шредингера с потенциалом $U(x) = -\omega_{pe}^2 / (\omega - k_z V_0(x))^2$ и энергией $W = -k_z^2$:

x_S — резонансная точка; x_{01} , x_{02} — обычные точки поворота

3.2. Смежные потоки

3.2.1. Резкая граница. Рассмотрим сначала колебания смежных электронных потоков, разделенных резкой границей $V_0(x) = V_{00} \operatorname{sgn} x$. По обе стороны от границы колебания имеют вид плоских волн с волновым числом

$$k_x = \begin{cases} k_x^{(+)} = k_z \left(\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_z V_{00})^2} - 1 \right)^{1/2}, & x > 0; \\ k_x^{(-)} = k_z \left(\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega + k_z V_{00})^2} - 1 \right)^{1/2}, & x < 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Рассчитаем коэффициенты прохождения и отражения колебаний, падающих на границу между потоками. Учитывая при идентификации падающей, прошедшей и отраженной волн соотношение (3.3) и используя условия сопряжения решений на границе между потоками, при $|\omega/k_z| < V_{00}$ получаем следующие выражения:

для коэффициента отражения

$$R = [(k_x^{(+)} + k_x^{(-)}) / (k_x^{(+)} - k_x^{(-)})]^2 \quad (3.10)$$

и коэффициента прохождения

$$T = 4k_x^{(+)} k_x^{(-)} / (k_x^{(+)} - k_x^{(-)})^2. \quad (3.11)$$

Коэффициент отражения (3.10) превышает единицу. Усиление колебаний при отражении связано с изменением знака энергии при

прохождении через границу, см. (3.4). Одновременно с этим меняется и направление потока энергии в проходящем сигнале (3.5). Дополнительная энергия, подтекающая к границе, уносится отраженной волной: $R=1+T$ (ср. со звуковыми колебаниями, рассмотренными в § 1.11).

Коэффициенты отражения и прохождения обращаются в бесконечность при $\omega=0$. Это означает, что колебания с $\omega=0$, описывающие волны, убегающие от границы, являются собственными. Они существуют без внешнего возбуждения.

Поскольку коэффициент отражения колебаний от разрыва превышает единицу, то достаточно ограничить электронный поток с одной стороны отражающей стенкой, чтобы он стал неустойчивым. В этом случае с другой стороны от разрыва колебаний будут иметь вид волн, убегающих на бесконечность. Данную неустойчивость можно отнести к неустойчивостям с отрицательной энергией, раскачивающимся за счет оттока энергии в убегающих волнах. Разумеется, будет неустойчивым и разрыв, ограниченный с обеих сторон.

3.2.2. Размытая граница. Предположим теперь, что граница между потоками размыта, например, профиль скорости имеет вид $V_0(x) = V_{00} \text{th}(x/2l)$. При анализе колебаний в потоках с плавными профилями скорости необходимо учитывать резонансные эффекты. Отметим, что в случае разрывных течений, когда $|V'_0| \rightarrow \infty$, размер резонансной зоны стремится к нулю, и, следовательно, резонансные эффекты по существу исключаются.

Следуя [75], перейдем в (3.1) к новой переменной $\xi = \frac{\omega - k_z V_{00}}{\omega + k_z V_{00}}$ и введем новую функцию $\varphi_1 = \xi^\alpha (1-\xi)^\beta \psi_1(\xi)$. При $\alpha = \varepsilon_1 (k_z l) [1 - \omega_{pe}^2 / (\omega + k_z V_{00})^2]^{1/2}$, $\beta = 1/2 + \varepsilon_3 \{1/4 - (k_z^2 l^2 V_{00} \omega_{pe})^2 / [\omega^2 - (k_z V_{00})^2]^{1/2}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$ волновое уравнение (3.1) сводится к гипергеометрическому:

$$\xi(1-\xi)\psi''_1 + (c - (a+b+1)\xi)\psi'_1 - ab\psi_1 = 0, \quad (3.12)$$

где $a = 1/2 + i\varepsilon_1 k_x^{(-)} + i\varepsilon_2 k_x^{(+)} + \varepsilon_3 d$; $b = 1/2 + i\varepsilon_1 k_x^{(-)} - i\varepsilon_2 k_x^{(+)} + \varepsilon_3 d$; $c = 1 + 2i\varepsilon_1 k_x^{(-)}$; $d = (1/4 - (k_z^2 l^2 V_{00} \omega_{pe})^2 / (\omega^2 - (k_z V_{00})^2)^2)^{1/2}$; $\varepsilon_2 = \pm 1$; $k_x^{(\pm)}$ определяется выражением (3.9). Решение уравнения (3.12), соответствующее волне, падающей справа, имеет вид $\psi_1 = F(a, b; c; \xi)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Используя предельные выражения для гипергеометрической функции при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$ [51], находим коэффициенты отражения и прохождения [75]:

$$R = \exp(-4\pi l k_x^{(+)}) \frac{\cos(2\pi d) + \text{ch}(2\pi l(k_x^{(+)} + k_x^{(-)}))}{\cos(2\pi d) + \text{ch}(2\pi l(k_x^{(+)} - k_x^{(-)}))}; \quad (3.13)$$

$$T = \exp[-2\pi l(k_x^{(+)} + k_x^{(-)})] \frac{\text{sh}(2\pi l k_x^{(+)}) \text{sh}(2\pi l k_x^{(-)})}{\cos(2\pi d) + \text{ch}(2\pi l(k_x^{(+)} - k_x^{(-)}))}. \quad (3.14)$$

Несложный анализ показывает, что при произвольных значениях констант, входящих в выражения (3.13), (3.14), оба они меньше соответствующих величин, рассчитанных для случая разрывного распределения скорости. Ослабление прошедшей волны

может быть приписано только резонансному поглощению колебаний. Что касается коэффициента отражения, то его уменьшение обусловлено как резонансными эффектами, так и сглаживанием профиля скорости.

Поскольку разрыв устойчив, а сглаживание профиля скорости уменьшает R , T , то неустойчивость плавного профиля $V_0(x) = V_{00} \text{th}(x/2l)$, о которой говорилось в [75], представляется маловероятной. Во всяком случае мы не нашли неустойчивых решений при значениях параметров, указанных в [75].

Если переходная область между потоками достаточно узка, так что выполняется условие $R+T > 1$ или даже $R > 1$, то ограничение потоков отражающими стенками или усложнение профиля скорости с добавлением еще одной переходной области приводит к неустойчивости [75].

В заключение заметим, что выше магнитное поле считалось бесконечным. В таком поле неустойчивы лишь достаточно сложные системы. При ослаблении магнитного поля становятся возможными поперечные смещения электронов, что дестабилизирует поток. С участием магнитного поля можно составить несколько безразмерных параметров, характеризующих электронный поток. С конечным значением каждого из них, вообще говоря, связана своя неустойчивость. Так, в [75] рассмотрена неустойчивость, обусловленная конечностью параметра $(\omega_{pe}/\omega_{ce})^2$, а в [32, 76] — параметра $k_y V'_0 / (k_z \omega_{ce})$ («дрейфовая» неустойчивость).

4. АЛЬФВЕНОВСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В плазме, помещенной в магнитное поле, имеется большое число ветвей колебаний, обладающих весьма своеобразными свойствами. В неоднородной плазме некоторые колебания испытывают резонансы (альфвеновский резонанс, циклотронный резонанс, плазменный резонанс), во многом сходные с гидродинамическим резонансом, рассматривавшимся выше. Особенно близок к гидродинамическому альфвеновский резонанс, возникающий при совпадении альфвеновской скорости $V_A = B / (4\pi\rho)^{1/2}$ с проекцией фазовой скорости колебаний плазмы на направление внешнего магнитного поля.

Явления, обусловленные альфвеновским резонансом, рассматривались в обзорной работе [77]. В [77], см. также [78, 79], за отправную точку взята аналогия между уравнением Орра — Зоммерфельда (1.13) и уравнением альфвеновских колебаний плоского слоя неоднородной плазмы:

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{\omega c^2 \rho_0}{4\pi\sigma} \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + \frac{d}{dx} \rho_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) \frac{d\varphi_1}{dx} - \\
 & - \tilde{k}^2 \rho_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) \varphi_1 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Здесь φ_1 — смещение плазмы по Ox , $\omega_A = k_z V_A(x)$, $\tilde{k}^2 = (k_z^2 + k_y^2)$, σ — проводимость плазмы. Используется декартова система коор-

динат, ось Oz которой направлена вдоль внешнего магнитного поля.

В идеальной плазме ($\sigma = \infty$) уравнение (4.1) сводится к укороченному уравнению второго порядка:

$$\frac{d}{dx} \rho_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) \frac{d\varphi_1}{dx} - \tilde{k}^2 \rho_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) \varphi_1 = 0, \quad (4.2)$$

которое находится в таком же отношении к уравнению (4.1), как уравнение Рэлея к уравнению Орра — Зоммерфельда.

В случае однородной плазмы уравнение (4.2) имеет нетривиальные решения при $\omega^2 = \omega_A^2(x)$. Они описывают хорошо известные в физике плазмы альфвеновские волны (поперечные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля с альфвеновской скоростью). Если плазма неоднородна, то условие $\omega^2 = \omega_A^2(x)$ выполняется лишь в одной точке (дискретном наборе точек), причем последняя является особой точкой укороченного уравнения (4.2). Как и в случае колебаний плоскопараллельных течений обычной жидкости, оказывается, см. приложение П.2, что если не интересоваться тонкой структурой решений в окрестности резонансной точки, то уравнение (4.1) может быть заменено укороченным — сингулярным уравнением (4.2), дополненным правилом обхода Ландау.

Использование уравнения (4.2) для описания альфвеновских колебаний позволило установить аналог теоремы Рэлея, согласно которому при монотонной зависимости $\omega_A^2(x)$ в плоском слое отсутствуют незатухающие собственные альфвеновские колебания [77].

В реальной плазме устранение незатухающих колебаний обусловлено действием конечной проводимости плазмы, которая приводит к поглощению колебаний в окрестности резонансной точки. При использовании уравнения (4.2) проводимость эффективно учитывается посредством правила обхода Ландау (ср. с действием вязкости на колебания плоскопараллельных течений обычной жидкости). Если плазма разрежена ($\omega \gg \nu_{ei}$, ν_{ei} — частота соударений электронов с ионами), то в окрестности резонансной точки доминируют эффекты конечной инерции электронов и соответственно уравнение (4.1) заменяется уравнением

$$-\frac{c^2 \omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2} \rho_0 \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + \frac{d}{dx} \rho_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) \frac{d\varphi_1}{dx} - \tilde{k}^2 \rho_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) \varphi_1 = 0.$$

Несложный анализ последнего с использованием приложения П.2 показывает, что в окрестности резонансной точки крупномасштабные альфвеновские колебания трансформируются в мелкомасштабные «электронные», убегающие от резонансной точки. (При $\omega_A \gg \omega$ дисперсионное уравнение «электронных» колебаний имеет вид $\omega^2 = \omega_{ce} \omega_{ci} k_z^2 / k^2$, см., например, [81]). Таким образом, если в столкновительной плазме энергия альфвеновских колеба-

ний поглощалась «на месте» в окрестности точки альфвеновского резонанса, то теперь она уносится из этой области электронными колебаниями. Однако количество энергии, теряемой альфвеновскими колебаниями, остается тем же.

В условиях отсутствия незатухающих альфвеновских колебаний в [77, 79] непосредственно анализировалась эволюция альфвеновских возмущений в плоском слое неоднородной плазмы. Для этой цели использовалось временное уравнение, образом Фурье которого является (4.1). Ввиду сходства последнего с уравнением Ора — Зоммерфельда эволюция альфвеновских возмущений оказывается сходной с эволюцией возмущений плоскопараллельных течений обычной жидкости. Если время, прошедшее с момента возникновения возмущения, мало $\left(t \ll \frac{1}{|\omega'_A|} \left| \frac{4\pi\sigma\omega}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \right|^{1/3} \right)$, то

конечная проводимость, как и вязкость в случае жидкости, не влияет на эволюцию гладких по Ox возмущений. На этом этапе начальное возмущение можно считать составленным из элементарных возмущений — псевдоволн, частоты которых образуют непрерывный спектр ($\omega = \omega_A^2(x)$). Его можно найти из условия обращения в нуль коэффициента при второй производной в уравнении (4.2). Такой же спектр дает так называемое локальное квазиклассическое приближение. При использовании этого приближения рассматриваются возмущения в виде плоских волн с медленно меняющимися параметрами $\exp(-i\omega t + ikr)$, причем считается $k_x \ll k$. Последнее предположение позволяет по существу игнорировать зависимость возмущений от x ; соответственно, например, в уравнении (4.2) опускается первое слагаемое. При этом из (4.2) получаем локальное дисперсионное соотношение $\omega^2 = \omega_A^2(x)$. Если плазма термодинамически неравновесна, то локальное дисперсионное соотношение может иметь решения с $\text{Im} \omega > 0$, что свидетельствует о неустойчивости плазмы.

Отдельная псевдоволна соответствует возмущению продольного тока вида $j_z \sim \delta(x - x_0)$. Она движется вдоль магнитного поля с локальной альфвеновской скоростью $V_A(x_0)$. Если начальное возмущение модулировано по Oz с длиной волны $2\pi/k_z$, то в лабораторной системе отсчета псевдоволна имеет частоту $\omega = k_z V_A(x_0)$. При неоднородном профиле альфвеновской скорости первоначально гладкое (и даже однородное) по Ox возмущение со временем становится все более изрезанным. Его характерный пространственный масштаб сокращается по закону $\delta x \sim \pi / (k_z |\omega'_A| t)$. Одновременно уменьшается амплитуда возмущения $|\varphi_1| \sim 1/t$.

Эффекты конечной проводимости (магнитная вязкость) приводят к диффузии возмущений поперек магнитного поля. Возмущение, локализованное вначале на какой-то силовой линии, со временем расплывается по закону $\delta x \sim (c^2 t / (4\pi\sigma))^{1/2}$. При $t \geq (4\pi^2\sigma / (c^2\omega_A'^2))^{1/3}$ на одной и той же силовой линии окажутся псевдоволны, фазы которых сдвинуты на π . Естественно, что результирующее возмущение должно затухнуть. Закон затухания,

определенный в [77, 79], имеет вид $|\varphi_1| \sim \exp[-c^2 \omega_A'^2 t^3 / (96\pi\sigma)]$, (ср. с п. 1.9.3).

Как уже отмечалось выше, частоты псевдоволн можно найти из локального дисперсионного соотношения. Если плазма термодинамически неравновесна, то последнее может иметь решения с $\text{Im } \omega > 0$, и поэтому амплитуды псевдоволн при $t \ll \ll (4\pi^2\sigma / (c^2 \omega_A'^2))^{1/3}$ возрастают со временем $\exp(\text{Im } \omega t)$. Однако как бы ни был велик инкремент нарастания, псевдоволны, в конце концов, затухнут под действием конечной проводимости плазмы $[|\varphi_1| \sim \exp(\text{Im } \omega t - c^2 \omega_A'^2 t^3 / (96\pi\sigma))]$. Максимальная амплитуда превышает первоначальную в $A = \exp(2^{7/2} \pi^{1/2} \sigma^{1/2} (\text{Im } \omega)^{3/2} / (3c |\omega_A'|))$ раз.

Аналогичные результаты были получены в [81], где рассматривалась эволюция волновых пакетов. На начальном этапе частота пакета определяется локальным дисперсионным соотношением, и сам пакет движется по направлению к резонансной точке. По мере приближения к ней x -компонент волнового вектора возрастает. В результате по прошествии некоторого времени в действие вступает конечная проводимость плазмы, вызывающая резкое затухание пакета.

При наличии в плазме стационарного шумового источника альфвеновских колебаний в неоднородной и неравновесной плазме установится стационарная альфвеновская турбулентность. Ее особенность в том, что амплитуда флуктуаций определяется линейными процессами. Теория такой турбулентности была развита в [77, 79]. В качестве шумового источника рассматривались флуктуации электронных токов из-за столкновений электронов с ионами.

В последнее время появился ряд работ, не отраженных в обзоре [77], в которых анализировались приграничные колебания в равновесной и в неравновесной плазме [82—86]. Под приграничными понимаем колебания, для которых условие альфвеновского резонанса выполняется поблизости от одной из граничных точек. В приложении П.2.1 показано, что на плоскости комплексного переменного x из резонансной точки x_S выходит сектор, в котором при любой как угодно большой проводимости решение уравнения (4.1) существенно неидеально. Если в этот сектор (на рис. П.2.2 он заштрихован) попадает одна из граничных точек, то при построении решения нельзя использовать укороченное уравнение (4.2), каким бы правилом обхода его ни дополнять.

Ось действительных значений x пересекает заштрихованный сектор в случае затухающих колебаний ($\text{Im } \omega < 0$). Поэтому затухающие колебания, вообще говоря, могут существовать в плазме даже в условиях применимости аналога теоремы Рэлея. Ниже показано, что в плазме с монотонным профилем альфвеновской скорости возможны затухающие колебания, которым соответствует расположение заштрихованного сектора, показанное на рис. 4.1. Очевидно, что если резонансная точка приближается к граничной, $x_S \rightarrow x_{1,2}$, то декремент затухания стремится к нулю ($\omega \rightarrow \omega_A(x_{1,2})$).

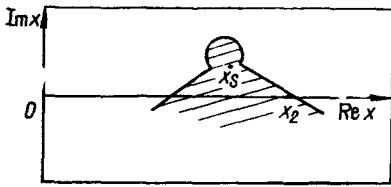


Рис. 4.1. Плоскость комплексного переменного x при собственных значениях частоты альфвеновских колебаний

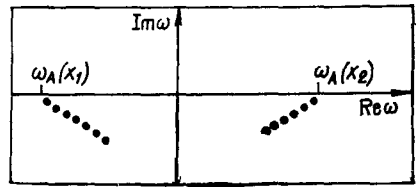


Рис. 4.2. Спектр собственных колебаний в плазме с монотонным профилем альфвеновской скорости

Обсуждаемые колебания сходны с особыми колебаниями, неустойчивыми в паузейлевском течении и в течении типа пограничного слоя (см. § 1.7). Сходная неустойчивость альфвеновских колебаний термодинамически неравновесной плазмы рассматривалась приближенно — аналитически в [82] и численно в [83—85]. Результаты [83—85] могут быть использованы также и для случая равновесной плазмы. Аналитически спектр приграничных колебаний равновесной плазмы был получен в [86]. Приведем упрощенный вариант рассмотрения, основанный на использовании результатов приложения П.2.2.

Предположим, например, что $\omega \approx \omega_A(x_2)$, причем точка x_2 попадает на правую границу заштрихованного сектора, выходящего из точки x_s (см. рис. 4.1). Выберем решение (4.1) в виде

$$\varphi_1(x) = V(\bar{x}) + D_1 U_2(\bar{x}) + D_2 A_3(\xi), \quad (4.3)$$

где $\bar{x} = \bar{k}(x - x_s)$; $\xi = (x_s - x)(\omega_A^2)' / \omega_A^2$; $D_{1,2}$ — не определенные пока постоянные. При $x \rightarrow x_s$ выражения для функций V , U_2 , A_3 приведены в приложении П.2.2. Функция A_3 экспоненциально спадает от точки x_s , и соответствующим слагаемым можно пренебречь у левой границы ($x = x_1$). Эта область лежит вне заштрихованного сектора на рис. 4.1, поэтому в ней можно использовать приближение идеальной плазмы, учитывая единственное граничное условие $\varphi_1(x_1) = 0$. Ему можно удовлетворить подбором константы D_1 . В то же время на правой границе необходимо выполнить два граничных условия $\varphi_1(x_2) = \frac{d\varphi_1}{dx} \Big|_{x=x_2} = 0$, поскольку уравнение (4.1) имеет четвертый порядок.

Предположим, что при $x = x_2$ выполняются условия $|\bar{x}| \ll 1$, $|\Lambda|^{1/3} |\xi| \gg 1$, где $\Lambda = \frac{4\pi i \sigma \omega}{c^2} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$. В этом случае $V(x) \approx 2\pi i$.

Для нахождения U_2 используем соотношение (П.2.11) при $i = 1$. На правой границе заштрихованной области функция U_3 является медленноменяющейся, поэтому, учитывая (П.2.12), получаем:

$$U_2(x) = \ln [\tilde{k}(x - x_s)] - \pi^{1/2} \Lambda^{-1/4} \xi^{-3/4} \exp \left\{ - (2/3) \exp (3\pi i / 4) \times \right. \\ \left. \times |\Lambda|^{1/2} \xi^{3/2} + \pi i / 4 \right\}.$$

Наконец, A_3 определяем с помощью соотношения (П.2.8) и выражений (П.2.12):

$$A_3(x) \approx 2\pi i - 2\pi^{1/2} \Lambda^{-1/4} \xi^{-3/4} \cos \left[-(2/3) \exp(3\pi i/4) \times \right. \\ \left. \times |\Lambda|^{1/2} \xi^{3/2} + \pi/4 \right].$$

Из приведенных выражений для V , U_2 , A_3 следует, что величина $\varphi_1(x_2)$ определяется медленноменяющейся составляющей решения, а $\frac{d\varphi_1}{dx} \Big|_{x=x_2}$ — быстроменяющейся. Поэтому граничному условию $\varphi_1(x_2) = 0$ можно удовлетворить подбором константы $D_2 \approx -1 - D_1 \ln [\tilde{k}(x_2 - x_S)] / (2\pi i)$. Второе граничное условие будет также удовлетворено, если

$$-(2/3) \exp(3\pi i/4) |\Lambda|^{1/2} [(x_2 - x_S) (\omega_A^2)' / \omega_A^2]^{3/2} \approx \pi(n+1/4), \quad (4.4)$$

где n — целое число.

Точкам x_{Sn} , определяемым из условия (4.4), соответствует дискретный спектр собственных колебаний [86]

$$\omega \approx \omega_A(x_2) - \frac{(\omega_A^2)'}{\omega_A^2} \Big|_{x=x_2} \frac{1}{\tilde{k} |\Lambda|^{1/3}} \left[\frac{3\pi}{2} \left(n + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \exp(\pi i/6). \quad (4.5)$$

Колебания подобного типа связаны и с левой границей. Рис. 4.2 иллюстрирует результирующий спектр.

В термодинамически неравновесной плазме рассматриваемые колебания могут стать неустойчивыми. Так, при наличии в плазме группы высокоэнергетических заряженных частиц в (4.1), (4.2) следует произвести замену $\omega_A^2(x_2) \rightarrow \omega_A^2(x_2)(1+i\eta)$, где величина $\eta \ll 1$ определяется параметрами высокоэнергетических частиц и магнитного поля [82]. Соответственно, заменяя в (4.5) $\omega_A^2(x_2)$ на $\omega_A(x_2)(1+i\eta/2)$, приходим к заключению, что колебания с малыми номерами n неустойчивы.

В заключение уточним понятия однородной и неоднородной плазмы, использовавшиеся выше. Мы предполагали, что размер плазмы по $0x$ значительно превышает размер резонансной зоны $L \gg |\omega_A^2 / (\omega_A^2)'| |\Lambda|^{-1/3}$. Именно такая плазма называлась неоднородной. При выполнении обратного условия резонансная зона перекрывает всю систему. В этом случае неоднородность плазмы не важна и в ней, как и в однородной плазме, существуют собственные альфвеновские колебания. В равновесной неидеальной плазме декремент затухания колебаний отличен от нуля: $\text{Im } \omega = -c^2 k^2 / (4\pi\sigma)$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Теорема Рэлея и затухающие колебания

В § 1.1 доказательство теоремы Рэлея основывалось на анализе соотношения (1.6). Для собственных колебаний левая часть (1.6) должна быть равной нулю, между тем интеграл в правой части при $V_0''(x) \neq 0$, $\text{Im } \omega \geq 0$ не может обратиться

ся в нуль. Если $\text{Im } \omega < 0$, то «вязкий сектор», выходящий из резонансной точки x_s , пересекает действительную ось (см. рис. 1.4). В результате на некотором отрезке действительной оси уравнения (1.4) — (1.6), соответствующие приближению идеальной жидкости, становятся несправедливыми. Следовательно, теряет силу и проведенное на их основе доказательство. Тем не менее покажем, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба определенный класс затухающих колебаний также невозможен.

В силу соотношения (1.8) для собственных колебаний с $\text{Im} \neq 0$ должно выполняться условие $x_1 < \text{Re } x_s < x_2$. Пусть $|\text{Im } x_s| \ll a$, $|\text{Re } x_s - x_{1,2}| \sim a$, где a — характерный масштаб изменения скорости течения. Сместим контур интегрирования в правой части соотношения (1.6) в комплексную плоскость на расстояние порядка a (см. рис. 1.4, б). На этом контуре $\phi_1(x)$ аналитически зависит от параметра x_s , причем характерный масштаб изменения по порядку равен a . Следовательно, при $|\text{Im } x_s| \ll a$ в результате интегрирования с точностью до величин порядка $|\text{Im } x_s| \ll a$ получаем то же значение, что и при $\text{Im } x_s = 0$, см. правую часть (1.9) с $\text{sgn } \text{Im } \omega = 1$.

Проведенное обсуждение показывает, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба наряду с незатухающими колебаниями отсутствуют слабозатухающие ($\text{Im} \omega \ll k \Delta V_0$, ΔV_0 — изменение скорости в пределах течения), резонирующие с течением в его внутренней части. В то же время нельзя исключить существования сильнозатухающих колебаний ($\text{Im} \omega \gg k \Delta V_0$), а также слабозатухающих, для которых условие резонанса выполняется вблизи от одной из границ. Такие возмущения исследовались численно в [7].

П.2. Уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной

П.2.1. Уравнение Орра — Зоммерфельда. К уравнениям подобного типа относится уравнение Орра — Зоммерфельда (1.13), если вязкость жидкости достаточно мала. Ввиду наличия малого параметра перед четвертой производной его решения можно разделить на быстро- и медленноменяющиеся. При рассмотрении медленноменяющихся решений можно не учитывать вязкости, ограничиваясь приближением идеальной гидродинамики. Для быстроменяющихся решений вязкость существенна. Однако разделение решений по масштабам несправедливо в окрестности резонансной точки, где решения с различным пространственным масштабом «завязываются» друг с другом. В этой области уравнение (1.13) принимает вид

$$\frac{1}{\Lambda} \psi_1'''' + \xi \psi_1'' + \psi_1 = 0, \quad (\text{П.2.1})$$

где $\xi = (x_s - x) V_0''(x_s) / (V_0'(x_s))$; $\Lambda = i(V_0'(x_s)/v) (V_0'(x_s) / (V_0''(x_s)))^3$.

Следуя [21], для решения (П.2.1) используем метод преобразования Лапласа, представив $\psi_1(\xi)$ в виде

$$\psi_1(\xi) = \int d\zeta \exp(\zeta \xi) \Phi(\zeta), \quad (\text{П.2.2})$$

где $\Phi(\zeta) = \zeta^{-2} \exp((\zeta^3/3\Lambda) - (1/\zeta))$.

Контур интегрирования в (П.2.2) выбирается из условия обращения в нуль на его концах присоединенной билинейной формы $\zeta^2 \Phi(\zeta) \exp(\zeta \xi)$. Возможен также замкнутый контур. Контур, выбранный Вазовым [21], изображены на рис. П.2.1.

Рассмотрим решения (П.2.1) вне вязкой области, окружающей резонансную точку $|\xi| \ll |\Lambda|^{-1/3}$. На контурах A_k сходимость интегралов (П.2.2) обусловливается быстроменяющимся множителем $\exp(\zeta^3/3\Lambda)$. Этим контурам соответствуют быстроменяющиеся решения, которые приближенно могут быть представлены в виде

$$\psi_{1r}(\xi) = \int (d\zeta/\zeta^2) \exp(\zeta^3/3\Lambda + \zeta \xi). \quad (\text{П.2.3})$$

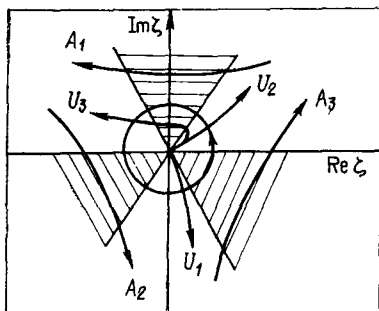


Рис. П.2.1. Контуры интегрирования в (П.2.2) при $\arg \Lambda = \pi/2$. Секторы, в которых $\text{Re}(\zeta^3/\Lambda) > 0$, заштрихованы.

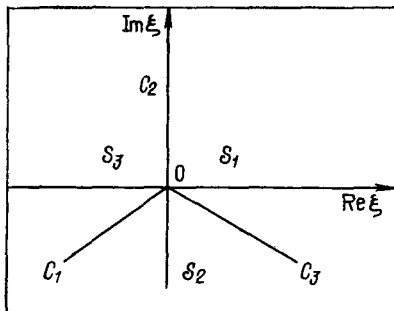


Рис. П.2.2. Плоскость комплексного переменного ξ для уравнения (П.2.1) при $\arg \Lambda = -\pi/2$. На линиях C_k — быстросменяющиеся решения A_k завязываются с медленноменяющимся V , в секторах S_k — медленноменяющиеся U_k с A_k .

Контур V , соответствующий одному из медленноменяющихся решений, можно расположить в области малых $|\zeta|$ (малых волновых чисел):

$$\psi_{1s}(\xi) = \int (d\zeta/\zeta^2) \exp(-\zeta^{-1} + \zeta\xi). \quad (\text{П.2.4})$$

Представление (П.2.4) можно использовать и для функции U_k , если значение $\arg \xi$ таково, что на соответствующих контурах интегрирования при $|\zeta| \rightarrow \infty$ выполняется условие $\text{Re}(\zeta\xi) < 0$.

Из (П.2.4) находим [87], что медленноменяющаяся функция V регулярна в точке $\xi=0$ (резонансной точке):

$$V \approx 2\pi i \sqrt{\xi} J_1(2\sqrt{\xi}), \quad (\text{П.2.5})$$

где J_1 — функция Бесселя.

Быстросменяющиеся функции A_k вычисляются методом перевала. Всюду, кроме линий C_k ($\arg \xi = -\pi/6 - (2\pi/3)k$) (рис. П.2.2), на контуры A_k попадает по одной перевальной точке $\xi = \pm i(\Lambda\xi)^{1/2}$. Соответственно в этих областях из (П.2.3) получаем:

$$A_k = \alpha_k \pi^{1/2} \Lambda^{-3/4} \xi^{-5/4} \exp\{\beta_k [(2i/3)\Lambda^{1/2} \xi^{3/2} + i\pi/4]\}, \quad (\text{П.2.6})$$

где $-\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3 = 1$.

Для определения A_k на линиях C_k воспользуемся тем обстоятельством, что семь функций V, A_k, U_k связаны тремя соотношениями (см. рис. П.2.1):

$$A_i = e_{ikl} U_l + \delta_{i2} V, \quad (\text{П.2.7})$$

где e_{ikl} — абсолютно антисимметричный тензор; δ_{i2} — символ Кронекера, $\delta_{i2} = 1$ при $i=2$. Суммируя (П.2.7), получаем:

$$A_1 + A_2 + A_3 = V. \quad (\text{П.2.8})$$

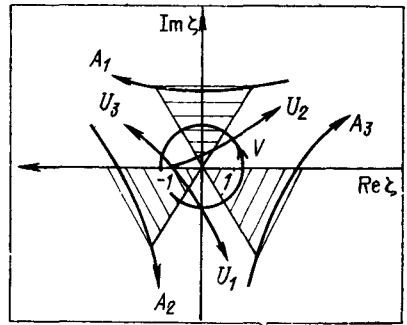
Из последнего соотношения следует, что быстросменяющиеся решения A_k в точке $\xi=0$ завязываются с медленноменяющимся регулярным решением V . Эта составляющая решения существенна на линиях C_k .

Для решений U_k длинноволновое представление (П.2.4) справедливо на всей плоскости комплексного переменного ξ , за исключением секторов S_k . [Если ξ лежит в этих секторах, то на контурах U_k нельзя удовлетворить условию $\text{Re}(\zeta\xi) < 0$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$.] В этой области функций U_k выражаются через функцию Ханкеля

$$U_1 \approx \pi i \sqrt{\xi} H_1(2\sqrt{\xi}) + 2\pi i \sqrt{\xi} J_1(2\sqrt{\xi});$$

$$U_{2,3} \approx \pi i \sqrt{\xi} H_1(2\sqrt{\xi}).$$

Рис. П.2.3. Контурсы интегрирования в (П.2.2) при нахождении решений (П.2.10), $\arg \Lambda = \pi/2$, секторы, в которых $\text{Re}(\zeta^3/\Lambda) > 0$, заштрихованы



В точке $\xi=0$ функции U_k имеют логарифмическую особенность:

$$U_k \approx 1 + \xi \ln \xi, \quad (\text{П.2.9})$$

[ср. (П.2.5), (П.2.9) с (1.11), (1.12)].

Чтобы определить U_k в секторах S_k , воспользуемся соотношениями (П.2.7). Из них следует, что в этих секторах решения U_k становятся коротковолновыми — быстроменяющимися.

Отметим, что сектор S_2 не захватывает действительной оси. Поэтому, если в качестве двух линейно независимых решений уравнения Рэлея выбрать V и U_2 , то на всей действительной оси, кроме окрестности точки x_s , для них будут справедливы длинноволновые асимптотики. Нетрудно видеть, что правило продолжения решения через эту точку совпадает с правилом обхода Ландау.

П.2.2. Уравнение альфвеновских колебаний. Уравнение (4.5), описывающее альфвеновские колебания, также является уравнением четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. В окрестности резонансной точки оно принимает вид

$$\frac{1}{\Lambda} \varphi_1'''' + (\xi \varphi_1')' - \kappa^2 \xi \varphi_1 = 0, \quad (\text{П.2.10})$$

где $\xi = (x_s - x) (\omega_A^2)' / \omega_A^2$; $\kappa = k \omega_A^2 / (\omega_A^2)'$; $\Lambda = i(4\pi\sigma / (\omega c^2)) \omega_A^6 / (\omega_A^2)'^2$.

Как и выше, преобразуем (П.2.10) по Лапласу. Для образа Лапласа при $\kappa \Lambda^{1/3} \gg 1$ получаем выражение

$$\Phi(\zeta) = (\zeta^2 - \kappa^2)^{-1/2} \exp[\zeta^3 / (3\Lambda)].$$

Рассмотрим семь решений уравнения (П.2.10). Соответствующие контурсы интегрирования изображены на рис. П.2.3. Из него следует, что рассматриваемые решения связаны тремя соотношениями:

$$A_i = e_{iki} U_i + \delta_{i3} V, \quad (\text{П.2.11})$$

[ср. с (П.2.7)].

При нахождении быстроменяющихся решений образ Лапласа можно приближенно брать в виде $\zeta^{-1} \exp[\zeta^3 / (3\Lambda)]$, медленноменяющихся — $(\zeta^2 - \kappa^2)^{-1/2}$ [ср. с (П.2.3), (П.2.4)].

Быстроменяющиеся решения находятся с помощью метода перевала

$$A_k = \alpha_k \pi^{1/2} \Lambda^{-1/4} \xi^{-3/4} \exp\{\beta_k [(2i/3) \Lambda^{1/2} \xi^{3/2} - (i\pi/4)]\}, \quad (\text{П.2.12})$$

где $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3 = -\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3 = 1$.

Медленноменяющееся решение V , аналитическое в точке $\xi=0$, дается выражением

$$V = 2\pi i I_0(\kappa \xi), \quad (\text{П.2.13})$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента (см., например, [87]).

Полученные представления быстроменяющихся решений (П.2.12) справедливы во всей плоскости комплексного переменного, за исключением линий S_k (см. рис. П.2.2). На этих линиях для нахождения A_k следует воспользоваться соотношением (П.2.8), которое можно получить, суммируя (П.2.11).

Медленноменяющиеся решения U_k сингулярны в точке $\xi=0$. На всей плоскости комплексного переменного, кроме секторов S_k , они выражаются через функцию Макдональда (см., например, [87]):

$$U_k \approx K_0(\kappa \xi). \quad (\text{П.2.14})$$

Для продолжения этих решений в сектор S_k следует использовать соотношение (П.2.11), из которого следует, что в секторах S_k пространственный масштаб решений меняется — они становятся мелкомасштабными.

Список литературы

1. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит. 1962.
3. Гидродинамическая неустойчивость/ Под ред. Г. Биркгофа, Р. Беллмана, Линь Цзя-Цзяо. М.: Мир, 1964
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. — Ч. 1.
5. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической неустойчивости. М.: Мир, 1971.
6. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1975.
7. Голдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая неустойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
8. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеониздат, 1976.
9. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
10. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
11. Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978.
12. Власов А. А. Теория многих частиц. М.: Гостехиздат, 1950.
13. Тимофеев А. В.// Вопросы теории плазмы. Сб. статей/ Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1985. Вып. 14. С. 56—228.
14. Бом Д. Общая теория коллективных переменных. М.: Мир, 1964.
15. Ландау Л. Д.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1946. Т. 16. С. 574—586.
16. Тимофеев А. В. Препринт ИАЭ-1570. М., 1968.
17. Тимофеев А. В.// Успехи физ. наук. 1970. Т. 102. С. 185—210.
18. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Нелинейные волны: Сб. статей/ Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 69—104.
19. Тимофеев А. В.// Вопросы теории плазмы. Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича М.: Атомиздат, 1979. Вып. 9. С. 205—232.
20. Rayleigh (J. W. Strutt)// Scientific Papers. Cambridge University Press. 1880. Vol. 1. P. 474—484.
21. Wasow W.// Ann. Math. 1948. Vol. 49. P. 852—851.
22. Barston E. M.// Ann. Phys. 1964. Vol. 29. P. 282—303.
23. Uberoi C.// Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. P. 1673—1675.
24. Хединг Д. Введение в метод фазовых интегралов. М.: Атомиздат, 1965.
25. Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982.
26. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
27. Budden K. G. Radio waves in ionosphere. Cambridge: University Press, 1961.
28. Гиизбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме М.: Наука, 1967.
29. Тимофеев А. В. Журн. техн. физ. 1968. Т. 38. С. 14—23.
30. Rosenbluth M. N., Simon A.// Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. P. 557—558.
31. Тимофеев А. В.// Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 705—706.
32. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1977. Т. 2.
33. Андреев Н. Б., Кирий А. Ю., Павличенко М. А., Фролов В. В.// Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 1273—1283.
34. Benney D. J., Bergeron R. F.// Stud. Appl. Math. 1969. Vol. 48. P. 187—204.
35. Davis R. E.// J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36. P. 337—346.
36. Haberman R.// Stud. Appl. Math. 1972. Vol. 51. P. 139—161.
37. Robinson J. L.// J. Fluid Mech. 1974. Vol. 63. P. 723—752.
38. Реутов В. П.// Проблемы мат. и теорет. физ. 1982. № 4. С. 43—54.
39. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
40. Тимофеев А. В.// Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 884—886.

41. Van Kampen N. G.// Physica. 1955. Vol. 21. P. 949 (Перевод в сб.: Колебания сверхвысоких частот в плазме./ Под ред. Г. А. Бернашевского, З. С. Чернова. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 37—70.
42. Карпман В. И.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1966. Т. 51. С. 907—914.
43. Case K. M.// Phys. Fluids. 1960. Vol. 3. P. 143—149.
44. Дикий Л. А.// Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. С. 1068—1071.
45. Костин В. М., Тимофеев А. В.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1967. Т. 53. С. 1378—1387.
46. Петвиашвили В. И.// Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. С. 787—789.
47. Benjamin T. V.// J. Fluid Mech. 1957. Vol. 2. P. 554—574.
48. Yih C. S.// Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. P. 321—334.
49. Miles J. W.// Ibid. 1957. Vol. 3. P. 185—204.
50. Кольхалов П. И.// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 2. С. 10—16.
51. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
52. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
53. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1964. Т. 47. С. 2206—2268.
54. Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F.// J. Fluid Mech. 1975. Vol. 71. P. 305—316.
55. Drazin P. G., Davey A.// Ibid. 1977. Vol. 82. P. 255—260.
56. Timofeev A. V.// Plasma Phys. 1968. Vol. 10. P. 235—248.
57. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
58. Levy R. H.// Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1288—1294.
59. Knaueg W.// J. Appl. Phys. 1966. Vol. 37. P. 602—611.
60. Богданов Г. Ф., Головин И. Н., Кучеряев Ю. А., Панов Д. А.// Ядерный синтез, 1962. Приложение. Т. 1. С. 215—225.
61. Damm C. C., Foote J. H., Futch A. H. e. a.// Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1472—1487.
62. Кадомцев Б. Б.// Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 296—308.
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
64. Rutvinskii S. V.// Nucl. Fus. 1975. Vol. 15. P. 723—727.
65. Брейzman Б. Н., Цельник Ф. А.// Физика плазмы. 1985. Т. 11. С. 776—781.
66. Abdrashitov S. F., Vajborodin S. F., Bekhtenev A. A., Volosov V. I. e. a.// Plasma Phys. and Nucl. Fus. Res. Vienna: IAEA, 1981. Vol. 1. P. 539—548.
67. Бехтеев А. А., Волосов В. И.// Журн. техн. физ. 1977. Т. 47. С. 1450—1460, Препринт ИЯФ 75-74, Новосибирск: Институт ядерной физики СО АН СССР, 1975.
68. Брагинский С. И.// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183—272.
69. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N.// Nucl. Fus. 1962. Suppl. Vol. 1. P. 143—150.
70. Тимофеев А. В.// Ядерный синтез. 1966. Т. 6. С. 93—100.
71. Timofeev A. V.// Nucl. Fus. 1968. Vol. 8. P. 99—107.
72. Rosenbluth M. N., Simon A.// Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1300—1322.
73. Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А.// Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 1046—1049.
74. Garrison E. G.// Proc. Phys. Soc. 1963. Vol. B82. P. 689—699.
75. Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А.// Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 849—853.
76. Zhelyazkov J., Ruchadze A. A.// Plasma Phys. 1972. Vol. 14. С. 167—188.
77. Тимофеев А. В.// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1979. Вып. 9. С. 205—232.
78. Тимофеев А. В.// Физика плазмы. 1976. Т. 2. С. 510—512.
79. Тимофеев А. В., Мейтлис В. П., Чулков Г. Н.// Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 1078—1087.

80. **Электродинамика плазмы:** Сб. статей/ Под ред. А. И. Ахиезера. М.: Наука, 1974.
81. **Мазур В. А., Михайловский А. Б., Френкель А. Л., Шухман И. Г.**// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1979. Вып. 9. С. 233—255.
82. **Rosenbluth M. N., Rutherford P. H.**// Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 34. С. 1428—1431.
83. **Патудин В. М., Сагалаков А. М.**// Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 512—522.
84. **Патудин В. М., Сагалаков А. М.**// Там же. 1985. Т. 11. С. 211—220.
85. **Патудин В. М., Сагалаков А. М.**// Устойчивость и турбулентность. Сб. статей/ Под ред. М. А. Гольдштика, В. М. Штерна. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1985. С. 61—70.
86. **Блехер П. М.**// Физика плазмы. 1985. Т. 11. С. 439—445.
87. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕНЕРАЦИЯ БЕЗЫНДУКЦИОННОГО ТОКА В ТОКАМАКЕ. Я. И. Колесниченко, В. В. Паррил, Г. В. Перверзев	3
Введение	3
1. Качественный анализ безындукционных методов генерации стационарного тока в токамаке	8
1.1. Основные механизмы генерации тока	8
1.2. Методы, основанные на внесении продольного импульса в плазму	12
1.3. Методы, не связанные с внесением внешнего импульса	22
2. Поддержание стационарного тока в токамаках	34
2.1. Реактор-токамак с самоподдерживающимся током (бутстреп-токамак)	34
2.2. Поддержание тока в токамаках инжекцией нейтральных атомов	44
2.3. Токи ВЧ-увлечения в плазме	55
2.4. Создание тока циклотронными волнами	81
3. Динамика создания тока в токамаке.	92
3.1. Кинетика генерации тока в плазме с электрическим полем	92
3.2. Динамика полного тока в токамаке	106
3.3. Распределение безындукционного тока в токамаке	123
3.4. Динамика плотности тока в токамаке	134
4. Заключение	145
РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ СПЛОШНЫХ СРЕД. А. В. Тимофеев	157
Введение	157
1. Колебания плоскопараллельных течений жидкости	159
1.1. Теорема Рэлея	159
1.2. Учет вязкости. Правило обхода Ландау	162
1.3. Уравнение Рэлея как уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом	167
1.4. Аналог теоремы Рэлея для сингулярных уравнений с полюсом произвольного порядка	172
1.5. Неустойчивость Рэлея	173
1.6. Анализ резонансного взаимодействия в течениях идеальной жидкости	176
1.7. Влияние вязкости на устойчивость течений	184
1.8. Неустойчивости течений как результат действия напряжения Рейнольдса	191
1.9. Эволюция начальных возмущений в течениях жидкости	192
1.10. Резонансная раскачка гравитационных волн	198
1.11. Резонансное взаимодействие в течениях сжимаемой жидкости	203
	245

2. Желобковые колебания газа заряженных частиц и неоднородно вращающейся плазмы в магнитном поле	208
2.1. Газ заряженных частиц в магнитном поле	208
2.2. Разреженная нескомпенсированная плазма	215
2.3. Плотная вращающаяся плазма	220
3. Колебания неоднородных электронных потоков в продольном магнитном поле	227
3.1. Поток с линейным профилем скорости	227
3.2. Смежные потоки	231
4. Альфеновские колебания неоднородной плазмы	233
Приложения	238
П.1. Теорема Рэлея и затухающие колебания	238
П.2. Уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной	239
Список литературы	242

РЕФЕРАТЫ ПУБЛИКУЕМЫХ СТАТЕЙ

УДК 533.9

Генерация безындукционного тока в токамаке. Колесниченко Я. И., Парилл В. В., Переверзев Г. В. // Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988. — Вып. 17. С. 3—156.

В обзоре изложено современное состояние теории генерации в токамаках стационарного тока неомическими методами. Во введении перечислены основные преимущества стационарной схемы работы реактора-токамака и проблемы поддержания стационарного тока. В первой главе проведен анализ всех предложенных методов генерации стационарного тока в токамаках неомическими методами и сравнительный анализ их достоинств и недостатков на качественном уровне. Во второй главе развита количественная теория генерации тока с использованием регулярных методов кинетической теории, позволяющая получить основной результат теории — эффективность генерации тока. Третья глава посвящена описанию влияния вихревого электрического поля на генерацию тока неомическими методами. Здесь же разобраны вопросы генерации тока в неоднородной плазме токамака. В заключении перечислены основные нерешенные проблемы теории. Приведен также краткий обзор современного состояния экспериментальных исследований и сравнения их результатов с предсказаниями теории.

Ил. 61. Библиогр. 230.

УДК 532.5:533.9

Резонансные эффекты в колебаниях неоднородных течений сплошных сред. Тимфеев А. В. // Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988. — Вып. 17. С. 157—244.

Анализируется резонансное взаимодействие колебаний с неоднородными течениями сплошных сред, возникающее при локальном совпадении скорости течения с проекцией фазовой скорости колебаний на направление течения. Показано, что основные закономерности, определяющие колебательные свойства и устойчивость неоднородных течений сплошных сред, допускают простую и естественную трактовку в терминах общей теории резонансного взаимодействия. Прослежены аналогии в колебаниях неоднородных течений плазмы и жидкости, отражающие единство механизма резонансного взаимодействия в различных средах.

Ил. 40. Библиогр. 87.

Научное издание

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Вып. 17

Редактор *Э. Д. Андреевко*

Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*

Технический редактор *Г. П. Преображенская*

Корректор *М. Г. Гулина*

ИБ № 2672

Сдано в набор 31 08 88. Подписано в печать 19.01 89. Т-04060
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2, Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ л 15.5. Усл. кр-отт 15.5. Уч-изд л 17,62
Тираж 1300 экз Заказ 6540 Цена 3 р. 80 к

Энергоатомиздат 113114 Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова» Союз-
полиграфпрома при Госкомиздате СССР. 113054 Москва, Валуевая, 28.

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ